



جمهوری اسلامی ایران

وزارت آموزش عالی

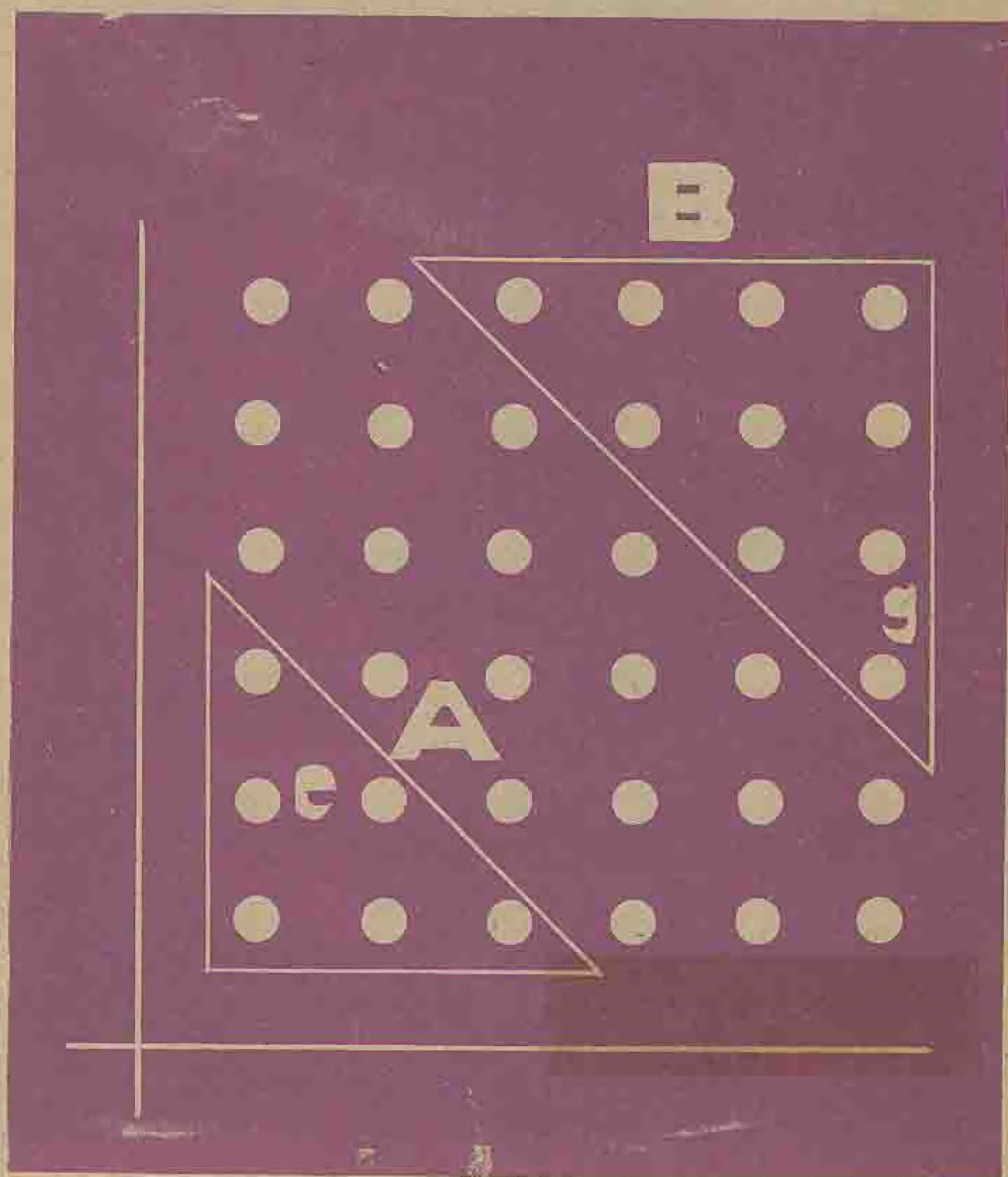
تعمیم و توسعه آموزش عالی

سال سوم

آموزش متوسطه عمومی

ریاضی و فیزیک

ریاضیات جدید



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات جدید

معاونان پژوهشی و برنامه ریزی آموزشی
مرکز تحقیقات آموزشی
شماره: ۶۳۵۶/۲۰۰۹
۸۲، ۲، ۹

سال سوم

آموزش متوسطه عمومی

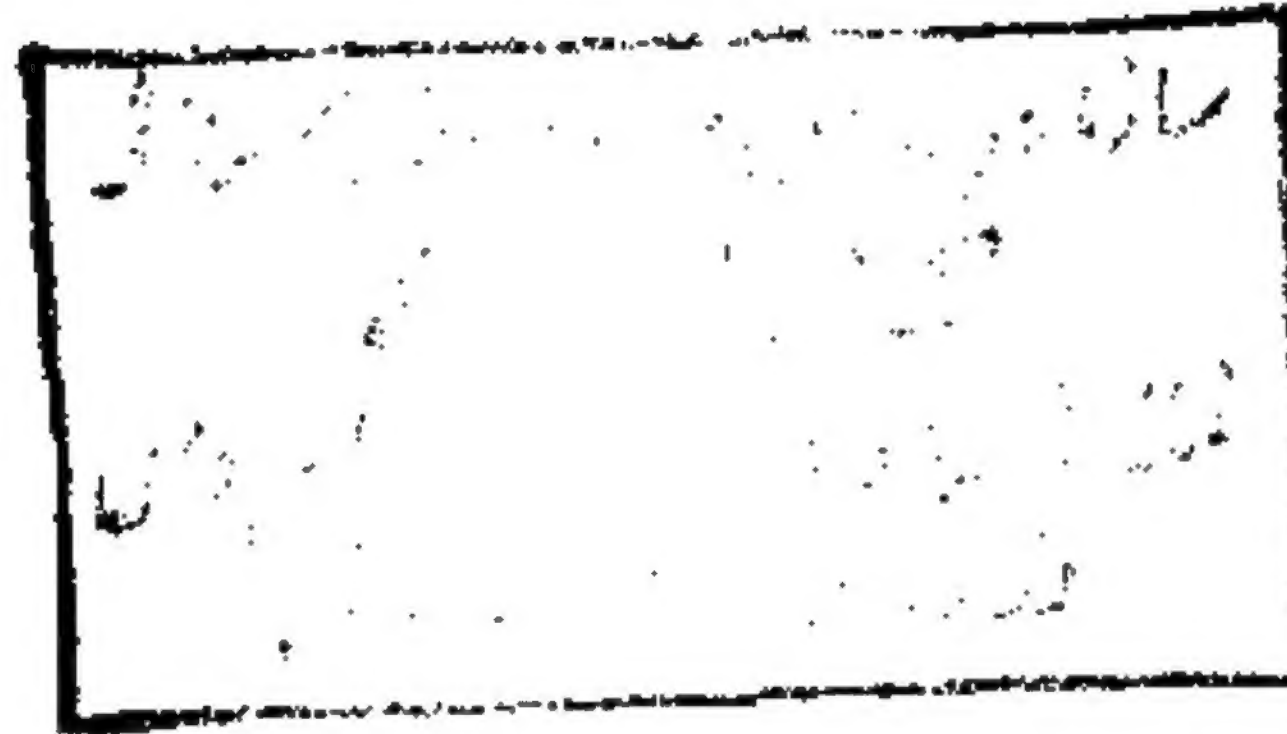
رياضی و فیزیک

۱۳۶.

۱۳۶۰

۵۱۰

۱۳۳۰



حقوق مادی این اثر متعلق به وزارت
آموزش و پرورش است .

پدیدآورندگان :

مؤلفان : غلامرضا دانش نازولی
صفحه پرداز : طهمورث حسن پور
رسام : خسرو مدیریان

میرزا جلیلی

چاپ از : اتحاد


ملت قهرمان ایران با پیروی کامل از امام امت و فریاد اللهاکبر و خون شهیدان نظام پلید شاهنشاهی را در گورستان تاریخ دفن کرد . دژخیمان و جلادان را به آتش خشم الهی گرفتار ساخت و با شرکت فعال خود در همه‌پرسی‌ها ، نظام جمهوری اسلامی و قانون اساسی را استقرار بخشید و رئیس‌جمهور و نمایندگان مجلس شورای اسلامی را انتخاب کرد . پس از آن با مبارزه‌های بزرگتر برای نخستین بار در پیشاپیش مستضعقان جهان ، شیطان بزرگ را به ذلت و التماس کشانید .

اکنون پس از طی این مراحل معجزه‌آسا ، برای تحکیم بنیان عظیم انقلاب اسلامی و تضمین تداوم و گسترش آن و مصونیتش در برابر هر توطئه‌ای ، زمان آن فرا رسیده است که این ملت بزرگ اساسی‌ترین مرحله ، یعنی انقلاب فرهنگی را قاطعانه بانجام رساند . باید تهمانده فرهنگ منحط شاهنشاهی و آموزشهای استعماری ، از تمام ارکان جامعه ، مدرسه ، دانشگاه ، ادارات و کوچه و بازار زدوده شود .

انقلاب فرهنگی در اسلام منشاء دگرگونیهای اجتماعی و اساس انقلاب سیاسی و اقتصادی جامعه است و اینک ما در این برهه از زمان و در این مقطع حساس ، عهده‌دار امر بسیار خطیر و مهمی هستیم و باید با تشخیص صحیح و روشن‌بینی ، مسیر آموزش و پرورش نسل جدید را مشخص سازیم و این فرهنگ آشفته و ویران را بازسازی کنیم و بدنبال انقلاب اجتماعی و سیاسی ، در تداوم انقلاب فرهنگی نیز به پیروزی نائل آئیم . بازیافتن و ارائه فرهنگ اصیل اسلامی بر عهده همه علاقمندان به فرهنگ است . باید ملاکهای بیگانه و غیر اصیل را شناسائی کرد و آنها را از آموزش و پرورش کنار گذاشت . این تغییر بنیادی در فرهنگ و در نظام آموزشی، چنان نیست که بصورت فرمان از مراکز اجرایی صادر شود . این خود مردم هستند که باید بفکر آینده خود باشند و تمام علاقمندان به فرهنگ این وظیفه خطیر را به عهده دارند . دستگاه اجرایی امروز از بطن مردم است و بین این دو جدائی نیست .

در سال جاری با توجه به فرصت محدود ، برخی از کتابها بازسازی شد و برخی دیگر نیز با اصلاحات آماده گردید . در این امر از پیشنهادها و راهنمایی‌های کتبی و شفاهی بسیاری از برادران و خواهران صاحب‌نظر ، خصوصاً " همکاران فرهنگی استفاده کردیم بامید آنکه در سال جدید با کمک همه اقشار مردم به‌پا خاسته ایران ، شاهد تغییر بنیادی نظام آموزشی در درون یک انقلاب اصیل فرهنگی باشیم تا تغییر و اصلاح اساسی ، بدانگونه که باید صورت گیرد و کتابهای درسی بر اساس آن نظام تدوین شود .

فهرست

۱		فصل اول - اعداد حقیقی
۶		فصل دوم - فضای برداری
۲۴		فصل سوم - جبر کلیدی
۵۷		فصل چهارم - آنالیز ترکیبی
۷۵		فصل پنجم - احتمال
۱۰۰		فصل ششم - آمار
۱۲۵		فصل هفتم - نامعادلات خطی
۱۴۰		فصل هشتم - برنامه‌ریزی خطی

اعداد حقیقی

مقدمه - مجموعه اعداد حقیقی بیشتر از هر مجموعه دیگر در ریاضیات مورد استفاده قرار می گیرد به همین دلیل ما در این فصل تا آنجا که ممکن است این مجموعه را مورد بررسی قرار می دهیم .

در این فصل ابتدا خواص جبری مجموعه اعداد حقیقی بیان خواهد شد و سپس بعضی از نتیجه های حاصل از آن مورد بررسی قرار خواهد گرفت .

همانطوریکه می دانید مجموعه اعداد حقیقی با R نشان داده می شود و به هر دو عدد حقیقی a, b يك عدد حقیقی منحصر بفرد $a+b$ (که مجموع a, b نامیده می شود) و يك عدد حقیقی منحصر بفرد $a \cdot b$ (که گاهی با ab نیز نشان داده می شود و حاصل ضرب a, b نامیده می شود) مربوط می شود . عبارت دیگر دو عمل « $+$ » و « \cdot » که به ترتیب جمع و ضرب نامیده می شوند روی R تعریف شده است .

خواص جبری R

الف - خواص عمل « $+$ » در R

ج ۱- عمل « $+$ » در R شرکت پذیر است . یعنی اگر a, b, c سه عدد حقیقی باشند ،

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

داریم :

ج ۲- در R يك عضو « 0 » که صفر نامیده می شود وجود دارد بطوری که برای هر a

متعلق به R داریم :

$$a+0=0+a=a$$

ج ۳- برای هر a در R يك عدد حقیقی مثل « x » وجود دارد که وارون a نسبت به

عمل جمع نامیده می شود و دارای خاصیت زیر است .

$$a+x=x+a=0$$

۱- این خواص جبری به تنهایی مشخص کننده مجموعه اعداد حقیقی نمی باشد (برای مثال

مجموعه اعداد گویا با همان محل های جمع و ضرب اعداد حقیقی نیز دارای همین خواص است) البته خواص

دیگری وجود دارد که اگر به خواص جبری اضافه شوند ، مجموعه اعداد حقیقی را بمعنی خاصی

مشخص خواهند کرد .

وارون a نسبت به عمل جمع با « $-a$ » نشان داده می شود .

ج ۴- عمل « $+$ » در R دارای خاصیت جابجائی است . یعنی a و b دو عدد حقیقی باشند، داریم :

$$a + b = b + a$$

خاصیت های ج ۱ ، ج ۲ ، ج ۳ و ج ۴ بیان می کنند که $(R, +)$ یک گروه جابجائی با عضو بی اثر صفر است .

ب - خواص عمل ضرب در R

ض ۱- عمل ضرب در R دارای شرکت پذیری است . یعنی اگر a, b, c سه عدد حقیقی باشند، داریم :

$$a.(b.c) = (a.b).c$$

ض ۲- در R یک عضو « 1 » که یک خوانده می شود وجود دارد بطوری که $1 \neq 0$ و برای هر a متعلق به R داریم :

$$a.1 = 1.a = a$$

ض ۳- برای هر عدد حقیقی و مخالف صفر a ، یک عدد حقیقی مثل « x » وجود دارد که وارون a نسبت به عمل ضرب نامیده می شود و دارای خاصیت زیر است .

$$a.x = x.a = 1$$

اگر $a \neq 0$ ، وارون a نسبت به عمل ضرب را با « a^{-1} » و یا « $\frac{1}{a}$ » نشان می دهیم .

ض ۴- عمل ضرب در R دارای خاصیت جابجائی است یعنی اگر a, b دو عدد حقیقی باشند، داریم :

$$a.b = b.a$$

خاصیت های ض ۱ ، ض ۲ ، ض ۳ و ض ۴ بیان می کنند که $(R - \{0\}, \cdot)$ یک گروه جابجائی با عضو بی اثر «یک» است .

پ - خاصیت پخش ضرب نسبت به جمع

اگر a, b, c اعداد حقیقی باشند، داریم :

$$a.(b+c) = a.b + a.c$$

خاصیت های الف ، ب و پ خواص جبری R نامیده می شوند .

از آنچه در ریاضیات جدید سال دوم درمورد گروهها خواندید نتیجه می شود که :

۱- عنصرهای بی اثر نسبت به عمل های جمع و ضرب در R (یعنی صفر و یک) منحصر بفرد می باشند یعنی R تنها دارای یک عنصر بی اثر نسبت به عمل جمع و تنها دارای یک عنصر بی اثر

نسبت به عمل ضرب است).

۲- عنصر وارون هر عدد حقیقی نسبت به عمل جمع و عنصر وارون هر عدد حقیقی مخالف صفر نسبت به عمل ضرب منحصر بفرد است (یعنی هر عدد حقیقی تنها دارای يك وارون نسبت به عمل جمع است و هر عدد حقیقی مخالف صفر تنها دارای يك وارون نسبت به عمل ضرب است) اگر a, b دو عدد حقیقی باشند، تعریف می کنیم :

$$a - b = a + (-b)$$

همچنین اگر $b \neq 0$ ، تعریف می کنیم :

$$a : b = a \left(\frac{1}{b} \right) = a \cdot b^{-1}$$

$a - b$ تفاضل b از a و $a : b$ تقسیم a بر b نامیده می شوند .

توجه کنید که اگر $b = 0$ ، تقسیم a بر b تعریف نشده است .

خاصیت تساوی : اگر $a = b$ و $c = d$ ، پس $a + c = b + d$ و $ac = bd$.

ما از حالا ببعد گاهی بجای $a \cdot b$ می نویسیم ab .

تعریف - اگر a يك عدد حقیقی باشد، تعریف می کنیم :

$$a^1 = aa, a^2 = (a^1)a, a^3 = (a^2)a, \dots$$

و بطور کلی اگر n يك عدد طبیعی باشد، تعریف می کنیم :

$$a^n = (a^{n-1})a$$

حالا با استفاده از خواص جبری R قضایای زیر را (که خاصیت های دیگری از R را

مشخص می سازند) ثابت می کنیم :

قضیه ۱- برای هر عدد حقیقی a داریم :

$$a \cdot 0 = 0$$

اثبات :

$$1 = 1 + 0$$

خاصیت ج ۲ :

$$a \cdot 1 = a \cdot (1 + 0)$$

خاصیت تساوی :

$$a = a \cdot 1 + a \cdot 0$$

خاصیت پخش و ض ۲ :

$$a = a + a \cdot 0$$

خاصیت ض ۲ :

$$a \cdot 0 = 0$$

خاصیت ج ۲ :

(زیرا عنصر بی اثر نسبت به عمل جمع منحصر بفرد است)

قضیه ۲- برای هر دو عدد حقیقی a, b داریم :

$$ab = 0 \implies a = 0 \text{ یا } b = 0$$

اثبات - اگر $a = 0$ ، قضیه ثابت است و اگر $a \neq 0$ ، نشان می دهیم که $b = 0$.
فرض کنیم $a \neq 0$. در این صورت خواهیم داشت :

$$ab = 0 \quad \text{فرض}$$

$$a^{-1} (ab) = a^{-1} \cdot 0 \quad \text{خاصیت تساوی}$$

$$a^{-1} \cdot 0 = 0 \quad \text{بنابر قضیه ۱}$$

$$a^{-1} (ab) = (a^{-1} a) b \quad \text{خاصیت ض ۱}$$

$$= 1 \cdot b \quad \text{خاصیت ض ۳}$$

$$= b \quad \text{خاصیت ض ۲}$$

$$\text{بنابراین } b = 0$$

از قضیه ۲ در حل معادلات استفاده می شود مثلاً

$$(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x-1=0 \text{ یا } x+1=0 \Rightarrow x=1 \text{ یا } x=-1$$

زیر مجموعه های R

اگر قرار دهیم

$$1, 2, 3, 4, \dots, \quad 2=1+1, \quad 3=2+1, \quad 4=3+1, \dots$$

مجموعه اعداد طبیعی بدست می آید. یعنی

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \text{مجموعه اعداد طبیعی}$$

مجموعه ای که از وارون های اعداد طبیعی نسبت به عمل جمع تشکیل شده است مجموعه

اعداد درست منفی نامیده می شود. یعنی

$$\{-1, -2, -3, -4, \dots\} = \text{مجموعه اعداد درست منفی}$$

همچنین همانطوری که می دانید مجموعه

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

مجموعه اعداد درست نامیده می شود.

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in Z, q \neq 0 \right\} \quad \text{بالاخره مجموعه}$$

مجموعه اعداد گویا نامیده می شود.

هر عدد حقیقی که گویا نباشد يك عدد ناگویا نامیده می شود. برای مثال عدد حقیقی a

که با $a^2 = 2$ تعریف شده است، يك عدد ناگویا است (چرا؟) این عدد ناگویا با $\sqrt{2}$ نشان

داده می شود. در اینجا متذکر می شویم که اثبات ناگویا بودن يك عدد حقیقی ممکن است بسیار

مشکل باشد.

تمرین

۱- نشان دهید که هیچ عدد حقیقی مانند x وجود ندارد بطوری که

$$0 \cdot x = 1$$

۲- نشان دهید که برای هر عدد حقیقی a داریم :

$$(-1) \cdot a = -a$$

۳- اگر a يك عدد حقیقی مخالف صفر باشد ، نشان دهید که

الف - a^{-1} مخالف صفر است

$$\text{ب - } (a^{-1})^{-1} = a$$

۴- نشان دهید که $\sqrt{2}$ يك عدد ناگویا است .

فضای برداری

مقدمه - در ریاضیات جدید سال دوم با مفهوم يك گروه آشنا شدید . در این فصل با يك مفهوم دیگر بنام «فضای برداری» آشنا خواهید شد . فضای برداری یکی از مفاهیم جالب و مهم در ریاضیات است و دارای کاربردهای زیادی در رشته‌های گوناگون از جمله فیزیک و اقتصاد است .

یادآوری می‌کنیم که مجموعه اعداد حقیقی با R نشان داده می‌شود .

تعریف - فرض کنیم (V, \oplus) يك گروه جابجائی باشد . همچنین فرض کنیم برای هر $v \in V$ و هر $a \in R$ ، حاصلضرب av تعریف شده باشد و $av \in V$.
(av حاصلضرب اسکالر نامیده می‌شود) . در اینصورت گوئیم V يك فضای برداری روی R است هرگاه

الف - برای هر $v \in V$ داشته باشیم :

$$1v = v$$

که در آن « 1 » عضو بی‌اثر مجموعه اعداد حقیقی نسبت به عمل جمع است .
ب - اگر a, b اعداد حقیقی باشند و v متعلق به V باشد ، داشته باشیم :

$$(a+b)v = av + bv$$

پ - اگر a, b اعداد حقیقی باشند و v متعلق به V باشد ، داشته باشیم :

$$(ab)v = a(bv)$$

ت - اگر v_1 و v_2 متعلق به V باشند و a يك عدد حقیقی باشد ، داشته باشیم :

$$a(v_1 \oplus v_2) = av_1 \oplus av_2$$

هر يك از عنصرهای V يك «بردار» نامیده می‌شود .

توجه : از حالا به بعد عمل « \oplus » روی V را برای سادگی با « $+$ » نشان می‌دهیم .

همچنین عنصر بی‌اثر V نسبت به عمل « $+$ » را «بردار صفر» می‌نامیم و با 0 نشان می‌دهیم .
يك بردار را معمولاً با یکی از حروف u, v, w, \dots و يك عدد حقیقی را با یکی از حروف a, b, c, \dots نشان می‌دهیم .

مثال ۱- همانطوری که می دانید $(R, +)$ یک گروه جابجائی است که در آن «+» عمل جمع در مجموعه اعداد حقیقی است. اگر قرار دهیم $V=R$ و حاصلضرب اسکالر را همان ضرب اعداد حقیقی در نظر بگیریم. بسادگی می توان دید که مجموعه اعداد حقیقی یک فضای برداری روی R است زیرا:

- الف - $\forall a \in R \quad 1a = a$
 ب - $\forall a, b, c \in R \quad (a+b)c = ac + bc$
 پ - $\forall a, b, c \in R \quad (ab)c = a(bc)$
 ت - $a(b+c) = ab + ac$

مثال ۲- فرض کنیم:

$$V = R \times R = R^2 = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in R\}$$

اگر عمل «+» را روی R^2 بصورت زیر تعریف کنیم:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \quad \forall (a_1, a_2) \text{ و } (b_1, b_2) \in R^2$$

بسادگی می توان دید که $(V, +)$ یک گروه جابجائی است. زیرا:

۱- برای هر (a_1, a_2) ، (b_1, b_2) و (c_1, c_2) متعلق به R^2 می توان نوشت:

$$\begin{aligned} [(a_1, a_2) + (b_1, b_2)] + (c_1, c_2) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) + (c_1, c_2) \\ &= [(a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2] \\ &= [a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2)] \\ &= (a_1, a_2) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2) \\ &= (a_1, a_2) + [(b_1, b_2) + (c_1, c_2)] \end{aligned}$$

۲- برای هر (a_1, a_2) متعلق به R^2 داریم:

$$(a_1, a_2) + (0, 0) = (0, 0) + (a_1, a_2) = (a_1, a_2)$$

یعنی $(0, 0)$ عضو بی اثر عمل «+» در R^2 است.

۳- برای هر (a_1, a_2) متعلق به R^2 داریم:

$$(a_1, a_2) + (-a_1, -a_2) = (-a_1, -a_2) + (a_1, a_2) = (0, 0)$$

یعنی هر عنصر از R^2 دارای یک عنصر وارون نسبت به عمل «+» است.

۴- برای هر (a_1, a_2) و (b_1, b_2) متعلق به R^2 داریم:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) + (b_1, b_2) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ &= (b_1 + a_1, b_2 + a_2) \\ &= (b_1, b_2) + (a_1, a_2) \end{aligned}$$

یعنی «+» روی R^2 دارای خاصیت جابجائی است .
 حالا برای هر $c \in R$ و $(a_1, a_2) \in R^2$ تعریف می کنیم :

$$c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2)$$

به سادگی می توان دید که $(V, +)$ با این حاصلضرب اسکالر يك فضای برداری روی R است زیرا :

الف - برای هر $(a_1, a_2) \in R^2$ داریم :

$$1(a_1, a_2) = (1a_1, 1a_2) = (a_1, a_2)$$

ب - اگر c, d اعداد حقیقی باشند و $(a_1, a_2) \in V = R^2$ ، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} (c+d)(a_1, a_2) &= ((c+d)a_1, (c+d)a_2) \\ &= (ca_1 + da_1, ca_2 + da_2) \\ &= (ca_1, ca_2) + (da_1, da_2) \\ &= c(a_1, a_2) + d(a_1, a_2) \end{aligned}$$

پ - اگر c, d اعداد حقیقی باشند و $(a_1, a_2) \in V = R^2$ ، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} (cd)(a_1, a_2) &= ((cd)a_1, (cd)a_2) = \\ &= (c(da_1), c(da_2)) \\ &= c(da_1, da_2) \\ &= c(d(a_1, a_2)) \end{aligned}$$

ت - اگر $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in V = R^2$ و c يك عدد حقیقی باشد ، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} c((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) &= c(a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ &= (c(a_1 + b_1), c(a_2 + b_2)) \\ &= (ca_1 + cb_1, ca_2 + cb_2) \\ &= (ca_1, ca_2) + (cb_1, cb_2) \\ &= c(a_1, a_2) + c(b_1, b_2) \end{aligned}$$

مثال ۳ - مجموعه همه ماتریسهای 2×2 را V در نظر بگیرید ، همانطوری

که در ریاضیات جدید سال دوم دیدید $(V, +)$ يك گروه جابجائی است (که در آن «+» عمل جمع ماتریسهای 2×2 می باشد) .

حال اگر c يك عدد حقیقی و $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ يك ماتریس 2×2 باشد ،

همانطوری که در ریاضیات جدید سال دوم دیدید تعریف می کنیم :

$$cA = c \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix}$$

بدین ترتیب يك حاصلضرب اسکالر روی V تعریف می شود .

بسادگی می توان نشان داد که $(V, +)$ با این حاصلضرب اسکالر يك فضای برداری روی R است زیرا :

الف - اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ يك ماتریس 2×2 باشد خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} 1A &= 1 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1a_{11} & 1a_{12} \\ 1a_{21} & 1a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A \end{aligned}$$

ب - اگر c, d اعداد حقیقی باشند و $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ يك ماتریس 2×2

باشد خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} (c+d)A &= (c+d) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (c+d)a_{11} & (c+d)a_{12} \\ (c+d)a_{21} & (c+d)a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ca_{11} + da_{11} & ca_{12} + da_{12} \\ ca_{21} + da_{21} & ca_{22} + da_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} da_{11} & da_{12} \\ da_{21} & da_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= c \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= cA + dA$$

پ- اگر c, d اعداد حقیقی باشند و $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ یک ماتریس 2×2

باشد، خواهیم داشت :

$$(cd)A = (cd) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (cd)a_{11} & (cd)a_{12} \\ (cd)a_{21} & (cd)a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c(da_{11}) & c(da_{12}) \\ c(da_{21}) & c(da_{22}) \end{bmatrix}$$

$$= c \begin{bmatrix} da_{11} & da_{12} \\ da_{21} & da_{22} \end{bmatrix}$$

$$= c \left(d \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) = c(dA)$$

ت- اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ دو ماتریس 2×2

باشند و $c \in \mathbb{R}$ ، خواهیم داشت :

$$c(A+B) = c \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right)$$

$$= c \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c(a_{11} + b_{11}) & c(a_{12} + b_{12}) \\ c(a_{21} + b_{21}) & c(a_{22} + b_{22}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} ca_{11} + cb_{11} & ca_{12} + cb_{12} \\ ca_{21} + cb_{21} & ca_{22} + cb_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cb_{11} & cb_{12} \\ cb_{21} & cb_{22} \end{bmatrix} \\
&= c \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\
&= cA + cB
\end{aligned}$$

حالا باثبات چند قضیه در مورد فضاهاى بردارى مى پردازیم .
 در فضايای زیر فرض مى کنیم V يك فضای بردارى ، « $\bar{0}$ » بردار صفر و « $\bar{0}$ » عدد حقیقی صفر باشد .

قضیه ۱ - برای هر عدد حقیقی a داریم :

$$a\bar{0} = \bar{0}$$

اثبات - اگر v متعلق به V باشد ، مى توان نوشت :

$$av = a(v + \bar{0}) \quad \text{چرا ؟}$$

$$= av + a\bar{0} \quad \text{چرا ؟}$$

از اینجا نتیجه مى شود که $a\bar{0} = \bar{0}$ ، زیرا عنصر بی اثر در گروه $(V, +)$ منحصر بفرد است .

قضیه ۲ - برای هر $v \in V$ داریم :

$$0v = \bar{0}$$

اثبات - اگر $v \in V$ و a يك عدد حقیقی باشد ، مى توان نوشت :

$$av = (a + 0)v \quad \text{چرا ؟}$$

$$= av + 0v \quad \text{چرا ؟}$$

از اینجا نتیجه مى شود که $0v = \bar{0}$ ، زیرا عنصر بی اثر در گروه $(V, +)$ منحصر بفرد است .

قضیه ۳ - اگر $v \in V$ و a يك عدد حقیقی باشد ، داریم :

$$a(-v) = (-a)v = -(av)$$

اثبات - برای اثبات تساوى $(-a)v = -(av)$ كافى است نشان دهیم که

$$av + (-a)v = \bar{0} \quad \text{چرا ؟}$$

بنابر قضیه ۲ مى توان نوشت :

$$\begin{aligned}av + (-a)v &= (a + (-a))v \\ &= 0v \\ &= \bar{0}\end{aligned}$$

همچنین برای اثبات تساوی $a(-v) = -(av)$ کافی است نشان دهیم که $av + a(-v) = \bar{0}$. (چرا ؟) .
بطور مشابه بنا بر قضیه ۱ می توان نوشت :

$$\begin{aligned}av + a(-v) &= a(v + (-v)) \\ &= a\bar{0} \\ &= \bar{0}\end{aligned}$$

و بنا بر این قضیه ثابت می شود .

از قضیه ۳ نتیجه می شود که برای هر $v \in V$ تساوی زیر برقرار است . (چرا ؟)
 $(-1)v = -v$

قضیه ۴ - اگر $v \in V$ و a يك عدد حقیقی باشد ، داریم :

$$av = \bar{0} \Rightarrow a = 0 \text{ یا } v = \bar{0}$$

اثبات - فرض کنیم $av = \bar{0}$. اگر a برابر با صفر باشد ، قضیه ثابت است و اگر a مخالف صفر باشد ، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}v &= 1v && \text{چرا ؟} \\ &= (a^{-1}a)v && \text{چرا ؟} \\ &= a^{-1}(av) && \text{بنا بر فرض} \\ &= a^{-1}\bar{0} && \text{بنا بر قضیه ۱} \\ &= \bar{0}\end{aligned}$$

زیر فضای يك فضای برداری

در بسیاری موارد ، در يك فضای برداری V ، زیر مجموعه هایی از V یافت می شوند که خود با همان دو عمل جمع و ضرب اسکالر که در V تعریف شده است تشکیل يك فضای برداری می دهند . این زیر مجموعه ها را که دارای اهمیت زیادی هستند زیر فضا می نامند . به مناسبت اهمیتی که این زیر مجموعه ها دارند تعریف زیر را می آوریم :

تعریف - فرض کنیم V يك فضای برداری و UCV . اگر U با دو عملی که در V تعریف شده اند . يك فضای برداری باشد ، آنگاه U را يك زیر فضای برداری V می نامند .

مثال ۱ - فرض کنیم V فضای برداری R^2 روی میدان R باشد ، آن گاه :

$$W_1 = \{(x, 0) | x \in R\}$$

يك زیر فضای V است .

حل - الف : $(W_1, +)$ يك گروه آبدلی یا جابجائی است . زیرا :

۱- برای هر $(x_1, 0)$ و $(x_2, 0)$ در W_1 داریم :

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0 + 0) = (x_1 + x_2, 0)$$

پس W_1 نسبت به عمل جمع بسته است .

۲- چون عمل $+$ در R^2 شرکت پذیر است ، این عمل در W_1 نیز که زیر مجموعه آن

است شرکت پذیر است .

۳- روشن است که $(0, 0) \in W_1$ ، و چون $(0, 0)$ عضو بی اثر R^2 نسبت به عمل $+$

است . این عضو با هر عضو دلخواه $(x, 0)$ از W_1 نیز جمع شود حاصل $(x, 0)$ است .

۴- روشن است که برای هر $(x, 0)$ در W_1 عضوی مانند $(-x, 0)$ به نام عضو متقابل

آن وجود دارد به قسمی که :

$$(x, 0) + (-x, 0) = (-x, 0) + (x, 0) = (0, 0)$$

۵- چون عمل $+$ در R^2 تعویض پذیر است ، در W_1 نیز این ویژگی برقرار است :

ب : ۶- برای هر $r \in R$ و هر $(x, 0) \in W$ داشته باشیم $r(x, 0) \in W$.

۷- برای هر $r \in R$ و هر $(x_1, 0)$ و $(x_2, 0)$ در W_1 داریم :

$$\begin{aligned} r((x_1, 0) + (x_2, 0)) &= r(x_1 + x_2, 0) = (r(x_1 + x_2), r \cdot 0) \\ &= (rx_1 + rx_2, 0) = (rx_1, 0) + (rx_2, 0) = r(x_1, 0) + r(x_2, 0) \end{aligned}$$

۸- همچنین برای هر r و s در R و هر $(x, 0)$ داریم :

$$\begin{aligned} (r+s)(x, 0) &= ((r+s)x, 0) = (rx + sx, 0) \\ &= (rx, 0) + (sx, 0) \\ &= r(x, 0) + s(x, 0) \end{aligned}$$

۹- همچنین داریم :

$$r(s(x, 0)) = r(sx, 0) = (r(sx), 0) = ((rs)x, 0) = (rs)(x, 0)$$

۱۰- برای هر $(x, 0)$ در W_1 داریم :

$$1(x, 0) = (1x, 0) = (x, 0)$$

یعنی تمام اصلهای يك فضای برداری برقرار است ، بنابراین W_1 يك فضای برداری روی R است .

تعبیر هندسی - از نظر هندسی مجموعه :

$$W_1 = \{(x, 0) | x \in R\}$$

مجموعه تمام تقاطعی از صفحه است که عرض آنها برابر صفر است و می‌دانیم که نمودار این مجموعه محور x هاست. پس محور x ها يك زیرفضای برداری صفحه است.

مثال ۲ - در فضای برداری R^2 ، زیرمجموعه U_1 را چنین تعریف می‌کنیم:

$$U_1 = \{(x, y) \mid x - y = 0\}$$

نشان دهید که U_1 يك زیرفضای R^2 است.

حل - الف - $(0, 0) \in U_1$ يك گروه اصلی یا جابجایی است. زیرا:

۱- برای هر (x_1, y_1) و (x_2, y_2) در U_1 داریم:

$$(x_1, y_1) \in U_1 \Rightarrow x_1 - y_1 = 0 \quad (1)$$

$$(x_2, y_2) \in U_1 \Rightarrow x_2 - y_2 = 0 \quad (2)$$

از جمع طرفین (۱) و (۲) داریم:

$$(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = 0$$

پس: $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in U_1$ یعنی U_1 نسبت به عمل جمع بسته است.

۲- شرکت پذیری: چون $+$ در R^2 شرکت پذیر است، این عمل در U_1 ، که زیرمجموعه آن است، نیز شرکت پذیر می‌باشد.

۳- روشن است که $(0, 0) \in U_1$ و چون $(0, 0)$ ، عضو بی اثر $+$ در R^2 است، در نتیجه این عضو با هر عضو (x, y) از U_1 جمع شود حاصل (x, y) است.

۴- اگر $(x, y) \in U_1$ ، آن‌گاه متقابل آن یعنی $(-x, -y)$ نیز در U_1 است. زیرا:

$$(x, y) \in U_1 \Rightarrow x - y = 0$$

$$\Rightarrow -x + y = 0 \quad \text{چرا؟}$$

$$\Rightarrow (-x) - (-y) = 0$$

۵- چون عمل $+$ در R^2 تعویض پذیر است، این عمل در U_1 نیز، که زیرمجموعه آن است، تعویض پذیر می‌باشد.

ب - داریم:

$$۶- r(x_1, y_1) \in U_1$$

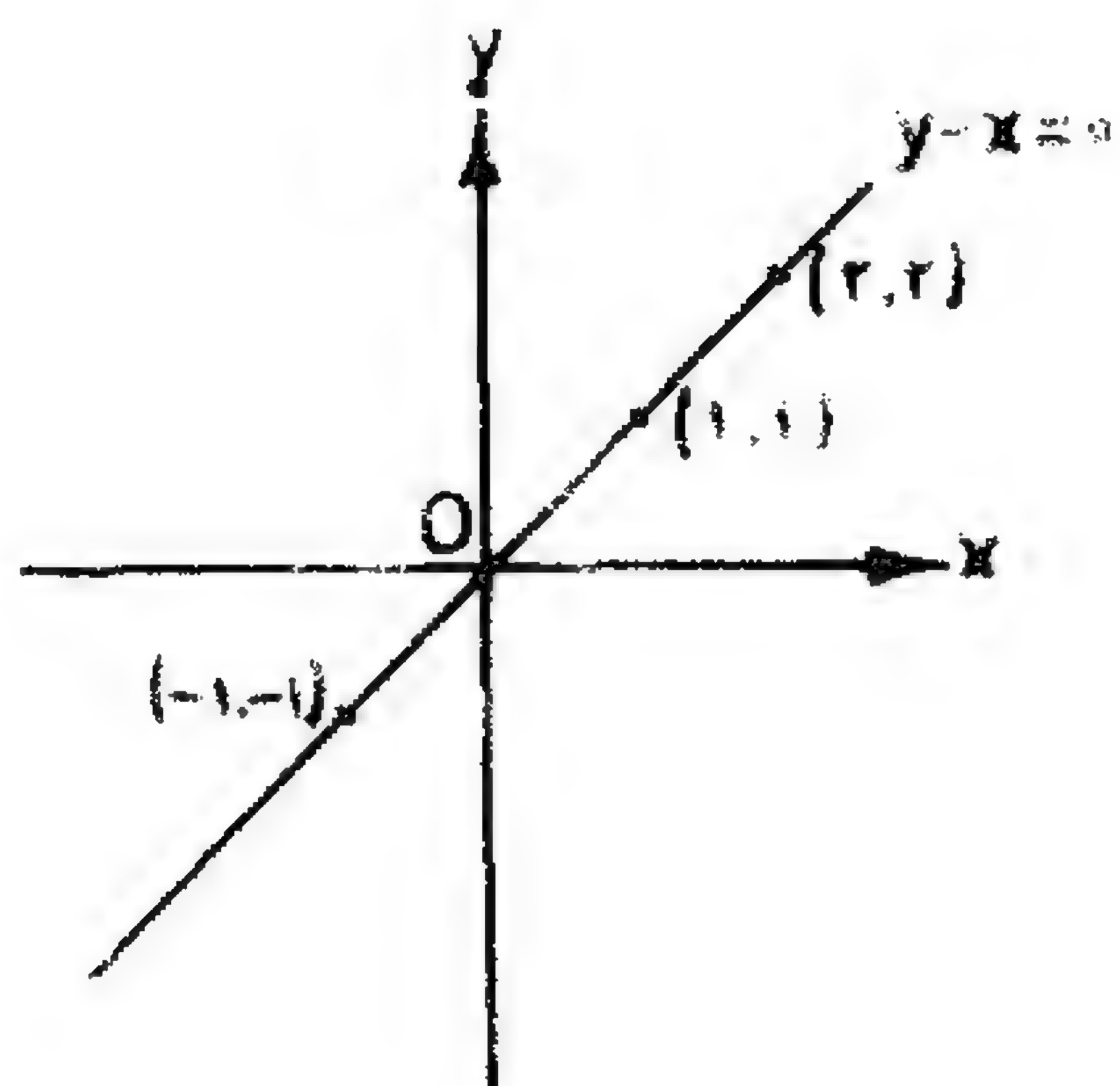
$$۷- r[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = r(x_1, y_1) + r(x_2, y_2)$$

$$۸- (r+s)(x, y) = r(x, y) + s(x, y)$$

$$۹- r(x, y) = r(x, y)$$

$$۱۰- r[s(x, y)] = r[s(x, y)]$$

یعنی تمام عملهای R^2 يك فضای برداری بر R^2 است. بنابراین، U_1 يك فضای برداری بر R است.



تعبیر هندسی - از نظر هندسی مجموعه :

$$U_1 = \{(x, y) | y - x = 0\}$$

مجموعه تمام نقاطی از صفحه است که تفاضل عرض و طول آنها صفر می باشد . و نمودار آن همان طور که می دانیم نیمساز ربع اول و سوم است . خواص بالا را از نظر ترمیمی می توان روی این خط تحقیق کرد .

توجه نمایید که تمام زیر مجموعه های V زیر-

فضا نیستند . در زیر دو نمونه از این زیر مجموعه ها را می بینید .

۱- زیر مجموعه $U_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$ يك زیر فضای R^2 نیست .

زیرا U_1 نسبت به عملهای $+$ و ضرب اسکالر تعریف شده در R^2 بسته نیست .

۲- زیر مجموعه $W_1 = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), \dots\}$ ، يك زیر فضای

برداري R^2 نیست . زیرا ، اگرچه W_1 نسبت به جمع $+$ بسته است ولی نسبت به عمل ضرب بسته نیست .

در مثالهای (۱) و (۲) صفحه قبل ، در تحقیق این که W_1 یا U_1 زیر فضای يك فضای

برداري V هست یا نه ، تمام ویژگیهای فضای برداري را برای آنها تحقیق کردیم . در صورتی

که به طور روشن در این دو مثال دیده می شود که بیشتر ویژگیهای V به طور مستقیم به U_1

یا W_1 منتقل می شود . آیا می توانید ویژگیهایی را که مستقیماً از V به U_1 یا W_1 منتقل

نمی شود نام ببرید ؟

در این دو مثال چنین به نظر می رسد که برای نشان دادن آن که يك زیر مجموعه V ،

زیر فضای V است یا نه کافی است ویژگیهای خاصی از V را برای آن تحقیق کنیم . فضیه زیر

شرط لازم و کافی را برای این که يك زیر مجموعه V يك زیر فضا باشد نشان می دهد .

قضیه - هرگاه W يك زیر مجموعه غیر تهی از فضای برداري V باشد ، شرط لازم و کافی

برای آن که W يك زیر فضای V باشد آن است که W نسبت به هر دو عمل جمع و ضرب

q

p

اسکالر بسته باشد . $(p \iff q)$

پرهان - شرط لازم : اگر W يك زیر فضای V باشد ، نسبت به هر دو عمل جمع و ضرب اسکالر بسته باشد . از

گاه نشان می دهیم که W دارای ویژگیهای خاص فضای برداري است . تنها دوتا از ویژگیها

V مستقیماً به W فرمیده است و آنها عبارتند از

$0 \in W$ و $x \in W$ نتیجه می شود $\lambda x \in W$.

برای آنکه نشان دهیم $\bar{0} \in W$ ، گوییم: چون W تهی نیست پس دست کم یک عضو مانند X در W وجود دارد و چون W نسبت به ضرب اسکالر بسته است پس $\bar{0} = 0 \cdot X \in W$ ، یعنی $\bar{0} \in W$.

برای آن که نشان دهیم « $X \in W \Rightarrow -X \in W$ » باز گوییم: چون $X \in W$ و $-1 \in R$ و W نسبت به ضرب اسکالر بسته است پس $(-1)X \in W$. اما بنا به نتیجه قضیه ۳ داریم: $(-1)X = -X$ ، پس $-X \in W$.

شرط کافی: فرض کنیم W زیر فضای V باشد، طبق تعریف زیر فضا داریم که W نسبت به جمع و ضرب اسکالر بسته است.

نتیجه - هر زیر فضای V شامل بردار $\bar{0}$ است

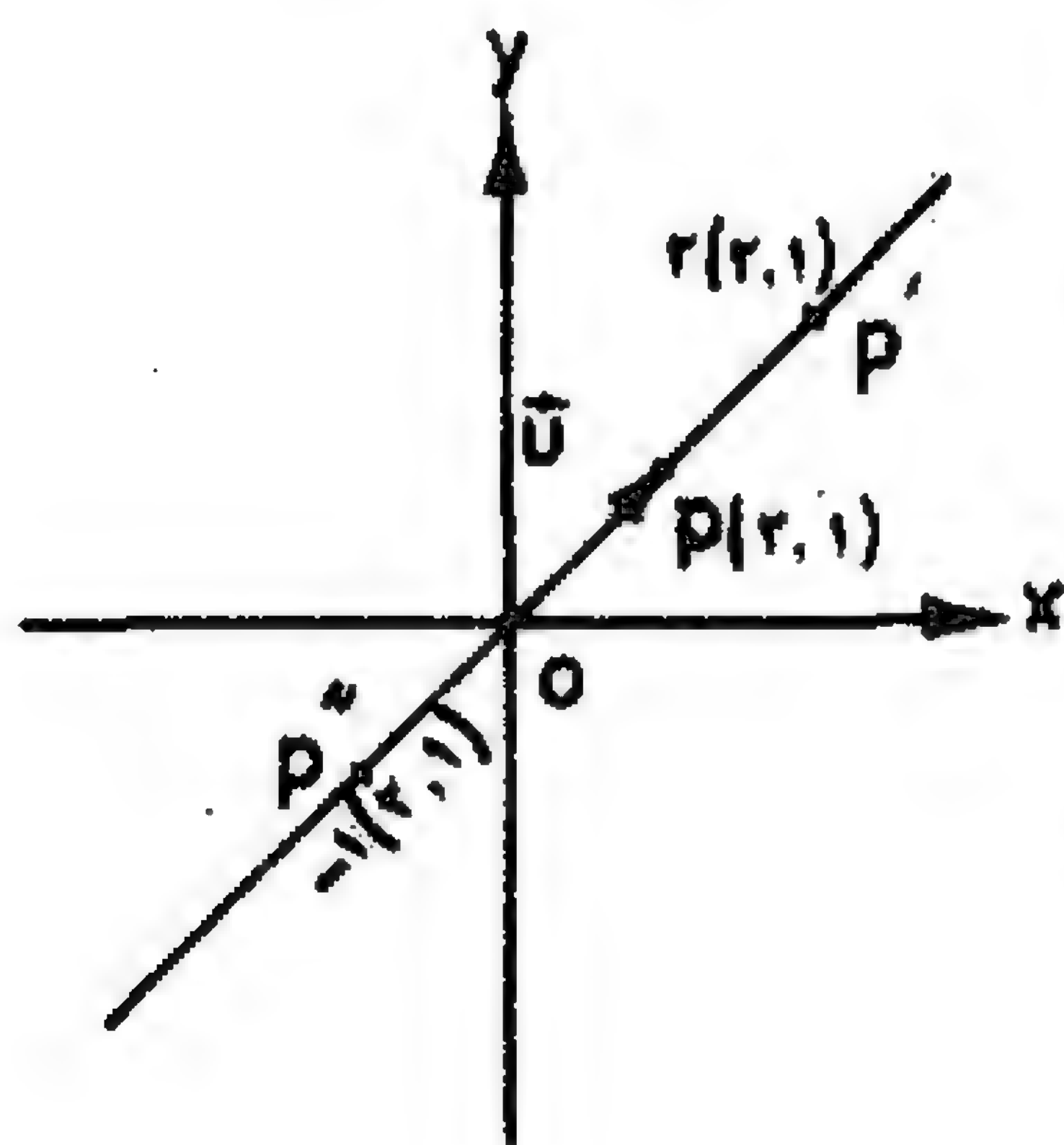
مثال - مجموعه $W = \{a(2, 1) | a \in R\}$ یک زیر فضای R^2 است. زیرا،
اولاً:

$$a(2, 1) + b(2, 1) = (a+b)(2, 1)$$

و چون $(a+b) \in R$ ، پس W نسبت به عمل $+$ بسته است.
ثانیاً:

$$b[a(2, 1)] = (ba)(2, 1)$$

و چون $ba \in R$ ، پس W نسبت به ضرب اسکالر بسته است. در نتیجه، بنا بر قضیه بالا، W یک زیر فضای R^2 است.



تعبیر هندسی - می دانیم $(2, 1)$ بردار مکان

$\vec{v} = \vec{OP}$ را مشخص می سازد و برای هر $a \in R$ بردار

$a(2, 1)$ نیز یک بردار مکان در امتداد \vec{OP} است.

به عبارت دیگر، $a(2, 1)$ که حاصل ضرب اسکالر a

در بردار \vec{v} است. یک زیر فضای V ، یعنی زیر فضای

بردارهای صفحه است.

تمرین

۱- ثابت کنید $S = \{ax + b | a, b \in R\}$ ، همراه با اعمال جمع و ضرب یک عدد در

دوجمله ای یک فضای برداری روی R است.

۲- در $R^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in R\}$ ، جمع و ضرب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$(a, b, c) + (d, e, f) = (a+d, b+e, c+f)$$

$$k(a, b, c) = (ka, kb, kc) \quad k \in R$$

نشان دهید که R^3 يك فضای برداری روی R است .

۳- هرگاه V يك فضای برداری و $v \in V$ ، عضو دلخواهی باشد ثابت کنید :

$$v + v = 2v$$

۴- ثابت کنید برای هر $v \in V$ و هر $r \in R$ داریم :

$$r(-v) = -rv$$

۵- ثابت کنید در هر فضای برداری ، برای هر دو عدد حقیقی r و s و هر v_1 و v_2 داریم :

$$r(v_1 - v_2) = rv_1 - rv_2$$

۶- ثابت کنید : $\forall v \in V, \forall r \in R, rv = \bar{0} \iff r = 0 \text{ و } v = \bar{0}$

۷- آیا مجموعه اعداد گویا همراه با اعمال جمع و ضرب معمولی يك فضای برداری روی R است ؟ چرا ؟

۸- ثابت کنید در هر فضای برداری برای هر $v \in V$ و هر r و s در R داریم :

$$(r-s)v = rv - sv$$

۹- نشان دهید $\{\bar{0}\}$ يك زیر فضای V است .

۱۰- آیا $S = \{(x, y) \mid x, y \in R \text{ و } x + 2y = 1\}$ ، يك زیر فضای R^2 است ؟ چرا ؟

۱۱- آیا $S = \{(x, y) \mid x, y \in R \text{ و } x + y/\sqrt{3} = 0\}$ يك زیر فضای R^2 است ؟ چرا ؟

۱۲- آیا $W = \{(x, y) \mid x, y \in R \text{ و } y = x^2\}$ ، يك زیر فضای R^2 است .

۱۳- نشان دهید هر خط راست که از مبدأ مختصات می‌گذرد يك زیر فضای R^2 است .

۱۴- نشان دهید ، $U = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in R \text{ و } x + 2y + z = 0\}$ ، يك زیر فضای R^3 است .

۱- این زیر فضا را معمولاً به صورت $(\bar{0})$ نمایش داده آن را زیر فضای بدیهی V می‌خوانند .

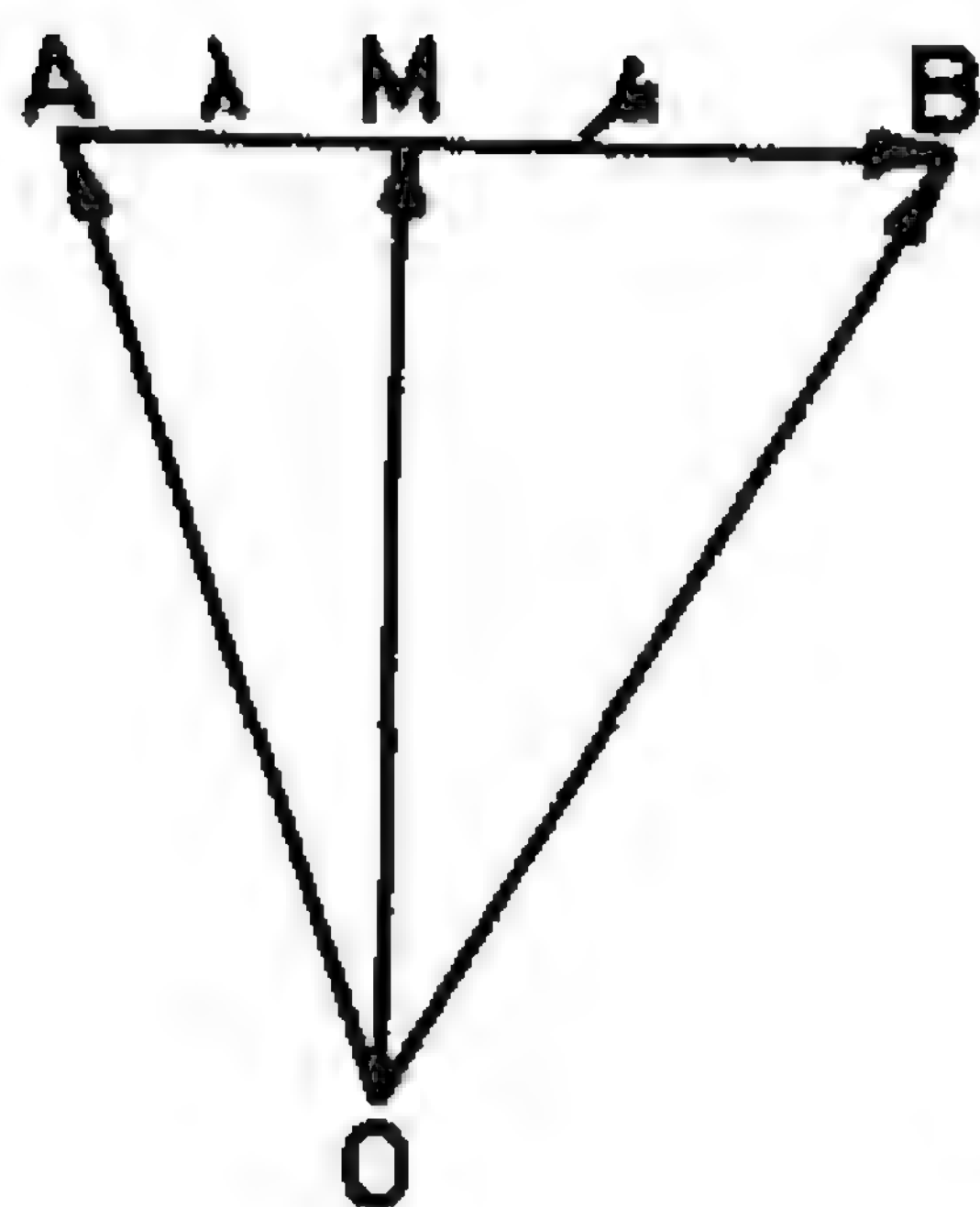
ترکیب خطی

در ریاضیات سال دوم دیدید :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

که در آن $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ را بردارهای پایه خواندیم. در فضای برداری اصطلاحاً می‌گوییم $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ یک ترکیب خطی از بردارهای $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ است.

همچنین دیدید، هرگاه نقطه‌ای مانند M روی \overrightarrow{AB} به گونه‌ای باشد که



$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{\lambda}{\mu} \quad (\lambda \text{ و } \mu \text{ اعداد حقیقی هستند}) \text{ آن گاه داریم:}$$

$$\mu \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB} = (\mu + \lambda) \overrightarrow{OM}$$

و یا :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\mu}{\mu + \lambda} \overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \overrightarrow{OB}$$

در اینجا نیز بردار \overrightarrow{OM} یک ترکیب خطی از بردارهای

\overrightarrow{OA} و \overrightarrow{OB} نامیده می‌شود. به‌طور کلی در این مورد تعریف زیر را می‌آوریم :

تعریف — فضای برداری V ، اگر v_1, v_2, \dots, v_n عضوهای V باشند، آن‌گاه برای هر $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ عضو $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ از V یک ترکیب خطی v_1, v_2, \dots, v_n می‌نامیم.

از این تعریف نتیجه می‌شود که هرگاه v_1, v_2, \dots, v_n و v عضوهای V باشند به گونه‌ای که:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \quad (a_1, a_2, \dots \text{ اعداد حقیقیند})$$

آن‌گاه گفته می‌شود v یک ترکیب خطی از بردارهای v_1, v_2, \dots, v_n است.

مثال ۱ — الف : در R^2 ، عضو $2(1, 0) + 3(0, 1)$ یک ترکیب خطی از $(1, 0)$ و $(0, 1)$ است.

ب : در ماتریسهای 3×1 ، عضو $2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ یک ترکیب خطی از

ماتریسهای $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ است.

مثال ۲ — الف : در فضای ماتریسهای 2×2 ، ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یک ترکیب خطی از

ماتریسهای $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ است. زیرا:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ب: در R^2 ، عضو $(9, 16)$ يك تركيب خطی از $(1, 2)$ و $(4, 7)$ است زیرا:

$$(9, 16) = 1(1, 2) + 2(4, 7)$$

ج: روشن است که همیشه می‌توان نوشت:

$$(0, 0) = 0(a, b) + 0(c, d)$$

یعنی $(0, 0)$ يك تركيب خطی از بردارهای دلخواه (a, b) و (c, d) است.

با توجه به تعریف و مثالهای بالا، اکنون سؤال زیر را مطرح می‌کنیم:

زیر مجموعه‌ای از بردارهای يك فضای برداری داده شده است:

الف: آیا می‌توان یکی از آنها را به صورت تركيب خطی بقیه نوشت؟

ب: آیا می‌توان هر برداری از این فضا را به صورت تركيب خطی این بردارها نوشت؟

مثال ۱ - مجموعه بردارهای $(9, 16)$ ، $(1, 2)$ و $(4, 8)$ از فضای برداری R^2

داده شده است، آیا می‌توان یکی از آنها را مثلاً $(9, 16)$ به صورت تركيب خطی از بقیه نوشت؟

فرض کنیم پاسخ به این پرسش مثبت باشد، یعنی اعداد حقیقی x و y یافت شوند به

گونه‌ای که:

$$(9, 16) = x(1, 2) + y(4, 8) \quad (1)$$

از اینجا به دست می‌آید:

$$(9, 16) = (x, 2x) + (4y, 8y) \quad \text{ضرب اسکالر}$$

$$(9, 16) = (x + 4y, 2x + 8y) \quad \text{جمع در } R^2$$

در این صورت بنابر برابری زوجهای مرتب داریم:

$$\begin{cases} x + 4y = 9 \\ 2x + 8y = 16 \end{cases}$$

پس وجود تساوی (۱) یعنی وجود x و y بستگی به وجود جوابهای این دستگاه دارد. اما

این دستگاه معادلات دارای جواب نیست چرا؟ یعنی هیچ دو عدد حقیقی مانند x و y یافت

نمی‌شوند که در تساوی (۱) صدق کنند؟ یعنی در R^2 عضو $(9, 16)$ را نمی‌توان به صورت

تركيب خطی از بردارهای $(1, 2)$ و $(4, 8)$ نوشت. در صورتی که در مثال ۲ بالا

قسمت ب، دیدید که $(9, 16)$ را می‌توان به صورت تركيب خطی از $(1, 2)$ و $(4, 7)$ نوشت.

مثال ۲ - بردارهای $(9, 16)$ ، $(1, 2)$ ، $(4, 7)$ و $(4, 8)$ در R^2 داده شده است، یکی از آنها مثلاً بردار $(9, 16)$ را به صورت ترکیب خطی از بقیه بردارهای $(1, 2)$ ، $(4, 7)$ و $(4, 8)$ بنویسید.

فرض کنیم عددهای حقیقی x ، y و z یافت شوند به گونه‌ای که:

$$(9, 16) = x(1, 2) + y(4, 7) + z(4, 8)$$

باتوجه به مثال ۱ این دستگاه به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 9 \\ 2x + 7y + 8z = 16 \end{cases}$$

که از حل آن داریم: $y = 2$ و $x = 1 - 4z$. در اینجا x بستگی به z دارد. بنابراین اگر $z = 0$ بگیریم، جواب $x = 1$ ، $y = 2$ و $z = 0$ به دست می‌آید. اگر $z = 1$ فرض شود، آن گاه $x = -3$ ، $y = 2$ و $z = 1$ و اگر ... بدین ترتیب دیده می‌شود که بردار $(9, 16)$ در R^2 را می‌توان به صورتهای بی‌شماری به شکل ترکیب خطی از بردارهای $(1, 2)$ ، $(4, 7)$ و $(4, 8)$ نوشت. بنابراین پاسخ به قسمت الف پرسش مطرح شده در بالا چنین است: در بعضی موارد جواب مثبت و در بعضی موارد جواب منفی است یعنی جواب کلی منفی است.

برای پاسخ به قسمت ب به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۳ - گفتیم که:

۱ - هر بردار مانند $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ در صفحه را می‌توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ نوشت.}$$

۲ - هر ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ از فضای ماتریسهای 2×2 را می‌توان به صورت ترکیب

$$\text{خطی از ماتریسهای } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ نوشت.}$$

لذا امکان این که در یک فضای برداری، بتوان هر عضو را به صورت ترکیب خطی از چند بردار داده شده این فضا نوشت وجود دارد. اما مثال زیر نشان می‌دهد که این امکان همیشگی نیست.

مثال ۴ - آیا هر بردار (a, b) از R^2 را می‌توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای $(1, -3)$ و $(3, -9)$ نوشت؟ فرض کنیم بتوانیم هر بردار مانند (a, b) را به صورت

زیر بنویسیم :

$$x(1, -3) + y(3, -9) = (a, b) \quad (1) \quad \text{تعریف ترکیب خطی} :$$

از این تساوی همان طور که قبلاً دیدیم دستگاه زیر نتیجه می شود :

$$\begin{cases} x + 3y = a \\ -3x - 9y = b \end{cases}$$

اما این دستگاه در حالت کلی جواب ندارد (چرا ؟) ، یعنی اعدادی مانند x و y در R وجود ندارد به گونه ای که تساوی (۱) برقرار باشد .

با توجه به مثالهای اخیر ، جواب به قسمت ب پرسش مطرح شده در صفحات قبل ، گاهی مثبت و گاهی منفی است . اکنون تعریف زیر را می آوریم :

تعریف - در فضای برداری V ، گوییم بردارهای v_1, v_2, \dots, v_n و بستگی خطی دارند هرگاه اعداد حقیقی a_1, a_2, \dots, a_n که دست کم یکی از آنها مخالف صفر است ، یافت شوند به گونه ای که :

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = \bar{0}$$

از این تعریف نتیجه می شود که اگر بردارهای v_1, v_2, \dots, v_n و v عضوهای V باشند و بتوان v را به صورت ترکیب خطی از v_1, v_2, \dots, v_n نوشت ، یعنی :

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \quad (a_1, a_2, \dots, a_n \text{ اعداد حقیقی هستند})$$

آن گاه گوییم v با بردارهای v_1, v_2, \dots, v_n بستگی خطی دارد .

مثال - ۱ - بردارهای $(1, 2, 0)$ ، $(2, -1, 2)$ و $(4, -7, 6)$ در R^3 بستگی خطی دارند .
زیرا داریم :

$$2(1, 2, 0) - 3(2, -1, 2) + 1(4, -7, 6) = (0, 0, 0)$$

۲ - بردارهای $(1, 0, 0)$ و $(0, 2, 0)$ و $(0, 0, 3)$ بستگی خطی ندارند . زیرا از :

$$a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 2, 0) + a_3(0, 0, 3) = (0, 0, 0)$$

نتیجه می شود $a_1 = 0$ ، $a_2 = 0$ ، $a_3 = 0$. یعنی تمام ضرایب صفر است .

تعریف - در فضای برداری V گوییم بردارهای v_1, v_2, \dots, v_n و استقلال خطی دارند (یا مستقل خطی هستند) ، هرگاه بستگی خطی نداشته باشند . به عبارت دیگر از :

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = \bar{0} \quad (a_1, a_2, \dots, a_n \text{ اعداد حقیقی هستند})$$

نتیجه شود : $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

در این صورت مجموعه $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ را مجموعه مستقل خطی می نامند .

مثال - ۱ - در فضای بردارهای صفحه ، بردارهای پایه مستقل خطیند . زیرا ، اگر

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

اگر a_1, a_2, a_3 خطی مرتبط باشند، $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

مثلاً $x = 1$ و $x^2 = 1$ (چند جمله‌ایهای با درجه کمتر از ۳، مثلاً x و x^2)

مستقل خطی، زیرا $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ نمی‌شود.

$$a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

اگر $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ، $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ خطی نیستند.

بردارهای R^3 بر دایره‌های $(1, 2), (1, 3), (2, 3)$ بستگی خطی ندارند یعنی مستقل خطی هستند.

هزینه

۱- فضای برداری R^3 بردار $(2, 3)$ را، هر جا که امکان دارد، به صورت ترکیب

خطی از بردارهای داده شده زیر بنویسید.

الف - $(1, 2), (1, 3), (2, 3)$ ؛ ب - $(1, 0), (0, 1), (3, 5)$ ؛ ج - $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ ؛ د - $(1, 0), (0, 1), (2, 1)$ ؛ ه - $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ ؛

۲- فضای برداری R^3 بردار $(4, 1, 0)$ را، هر جا که امکان دارد، به صورت ترکیب

خطی از بردارهای داده شده زیر بنویسید.

الف - $(0, 1, 0), (1, 2, 1), (2, 1, 2)$

ب - $(1, -2, 3), (-1, 3, 2), (-1, 2, 3)$

ج - $(1, 1, 1), (-1, 1, -1)$

د - $(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$

۳- در فضای برداری R^3 ، از دسته بردارهای داده شده زیر، کدام یک بستگی خطی

دارد. دلیل بیاورید.

الف - $(2, 3), (3, 2)$ ؛ ب - $(3, 2), (-\frac{3}{2}, -1)$

ج - $(2, 3), (3, 2), (1, 1)$ ؛ د - $(\sqrt{3}, \sqrt{5}), (2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}), (2\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$

۴- در فضای برداری R^3 ، از دسته بردارهای داده شده زیر، کدام یک بستگی خطی

دارد. دلیل بیاورید.

الف - $(2, 1, 3), (1, 0, 2), (3, 2, 4)$ ؛ ب - $(2, 1, 3), (1, 0, 2), (3, 2, 4)$

ج - $(2, 1, 3), (1, 2, 0)$ ؛ د - $(3, 2, 4), (0, 1, 0)$

۵- ثابت کنید در فضای برداری R^3 ، هر سه بردار متمایز یا بیشتر بستگی خطی دارند.

۶ - در فضای برداری $M_{2 \times 2}$ ، آیا بستگی خطی دارند ؟ دلیل بیاورید .

۷ - آیا ماتریسهای زیر :

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

بستگی خطی دارند ؟

۸ - در فضاهای R^2 و R^3 ، از دسته بردارهای داده شده زیر ، کدام يك استقلال خطی دارد .
دلیل بیاورید .

الف - $(1, 0, 0), (5, -4, 3), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$

ب - $(2, -3), (-\frac{2}{3}, 1)$

ج - $(5, -4, 3), (1, 1, 1), (0, 2, 1)$

د - $(2, 3), (4, 5)$

۹ - عضوهای کدام يك از مجموعه های زیر ، استقلال خطی دارند .

الف : $\{1, t, 2-3t\}$ ؛ ب : $\{2^x, 2-x\}$

۱۰ - نشان دهید که در هر فضای برداری :

الف - عضوهای هر زیرمجموعه که شامل $\vec{0}$ باشند بستگی خطی دارند .

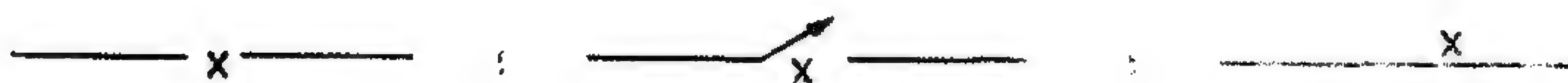
ب - اگر $v \neq \vec{0}$ ، آن گاه $\{v\}$ مستقل خطی است .

جبر کلیدی

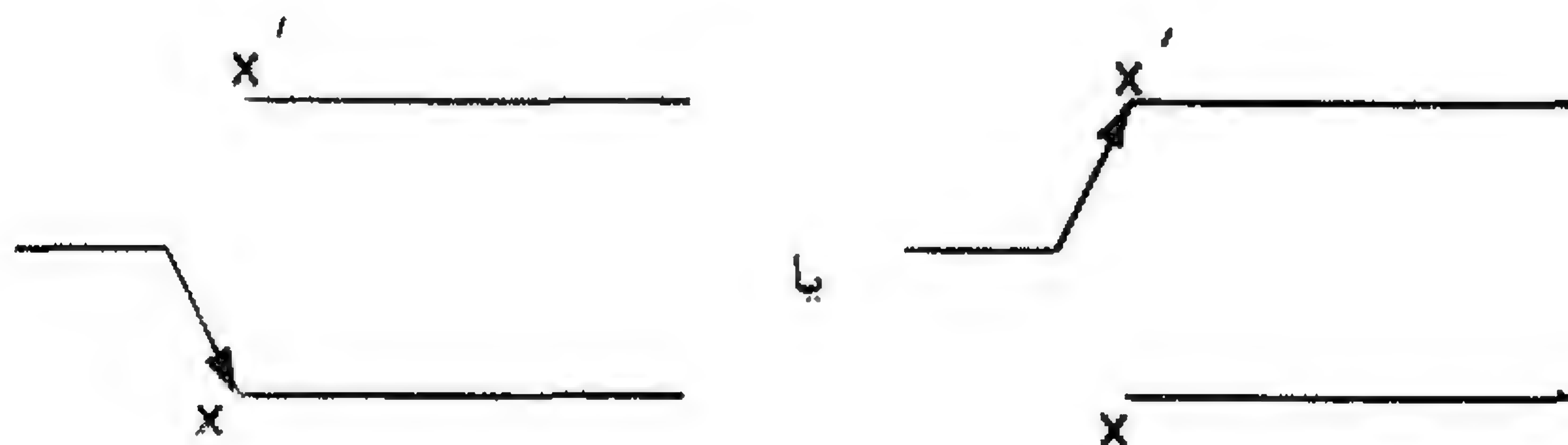
مداری را که شامل مولد کلید، لامپ و سیم رابط است در نظر بگیرید، می‌دانید که چهار عامل در روشن شدن لامپ دخالت دارد. ۱- مولد کار کند. ۲- لامپ نسوخته باشد. ۳- مقاومت لامپ متناسب با ولتاژ مولد باشد. ۴- کلید سالم باشد. در این بخش هر جا اسمی از مدار برده می‌شود فرض بر این است که عوامل فوق موجود بوده و آنچه مورد توجه ماست نکات زیر می‌باشد:

۱- باز و بسته بودن کلید یا کلیدها، تعداد کلیدها در یک مدار، نحوه قرار گرفتن کلیدها در مدار، طرح ریزی یک مدار برای هدف خاص و بالاخره کم کردن تعداد کلیدها در یک مدار به منظور کاهش هزینه بدون ایجاد کاستی در کار مدار.

نمایش کلیدها - برای نمایش کلیدها در حالت کلی از حروف الفبای لاتین x, y, z, \dots یا A, B, \dots استفاده می‌شود. ساده‌ترین مدارها آنهایی هستند که شامل یک کلید می‌باشند. این مدارها را به یکی از صورتهای زیر نشان می‌دهند.



می‌دانیم که هر کلید برق دارای دو وضع است، یا بسته است (جریان برق از آن می‌گذرد) یا باز است (جریان از آن نمی‌گذرد). در یک مدار اگر دو کلید چنان باشند که وقتی یکی باز است دیگری بسته باشد و بالعکس، آن گاه اگر یکی را به x نمایش دهیم دیگری را با x' مشخص خواهیم ساخت. شکلهای زیر چنین حالتی را نشان می‌دهد.



ارزش کلیدها - همانطور که برای گزاره‌ها ارزش درستی قائل شدیم، برای کلیدها نیز ارزش

فائل می‌شویم؛ بدین ترتیب که اگر کلیدی بسته باشد کوئیم ارزش آن ۱ است و اگر باز باشد ارزش آن ۰ است. بنابراین حروفی که برای نمایش کلیدها به کار می‌بریم متغیرهایی هستند که تنها می‌توانند مقادیر ۱ یا ۰ را اختیار کنند.

x
۱
۰

کلیدی را که همواره باز است به ۰ و کلیدی را که همواره بسته است به ۱ نشان می‌دهیم. پس ۰ و ۱ نسایش کلیدهای ثابت هستند.

بنابر آنچه گفته شد، x و x' دارای ارزشهای مختلفی هستند، یعنی $x = 0$ فقط و فقط وقتی که $x' = 1$ جدول ارزش x' یا توجه به ارزش x چنین است

x	x'
۰	۱
۱	۰

ترکیب کلیدها - راههای مختلفی برای ترکیب کردن (اتصال) کلیدها وجود دارد. ما چند نمونه ساده آنها را در زیر می‌آوریم.

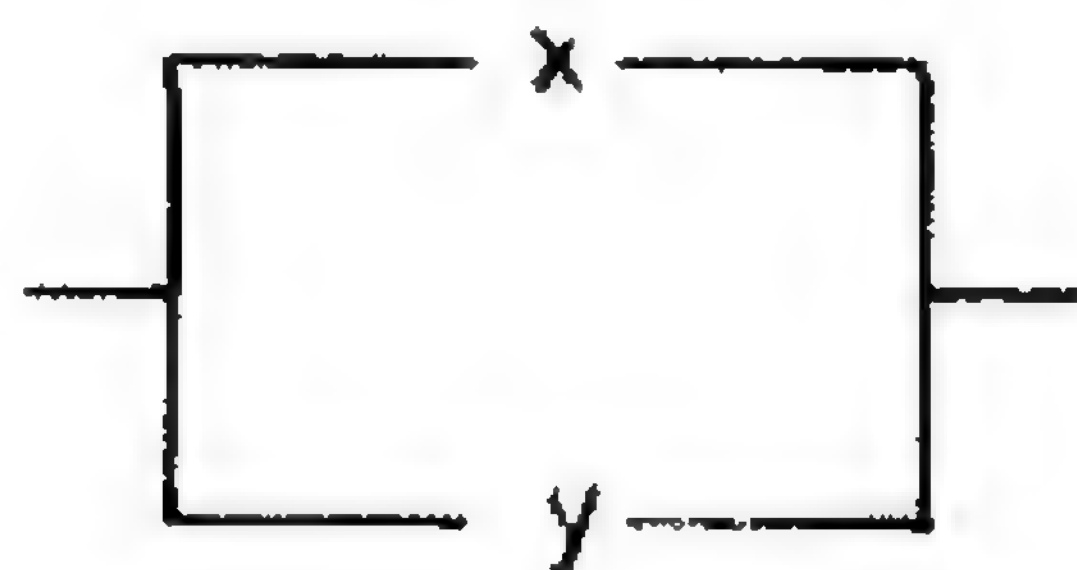
ترکیب (اتصال) متوالی - شکل زیر ترکیب دو کلید x و y را به صورت متوالی نشان می‌دهد.



در این اتصال وجود یا عدم وجود جریان بستگی به باز و بسته بودن دو کلید با هم دارد. مدار حاصل از ترکیب متوالی کلید x و y را به $x \cdot y$ یا xy نشان می‌دهیم. جدول ارزش این مدار با توجه به ارزشهای x و y چنین است.

x	y	$x \cdot y$
۱	۱	۱
۱	۰	۰
۰	۱	۰
۰	۰	۰

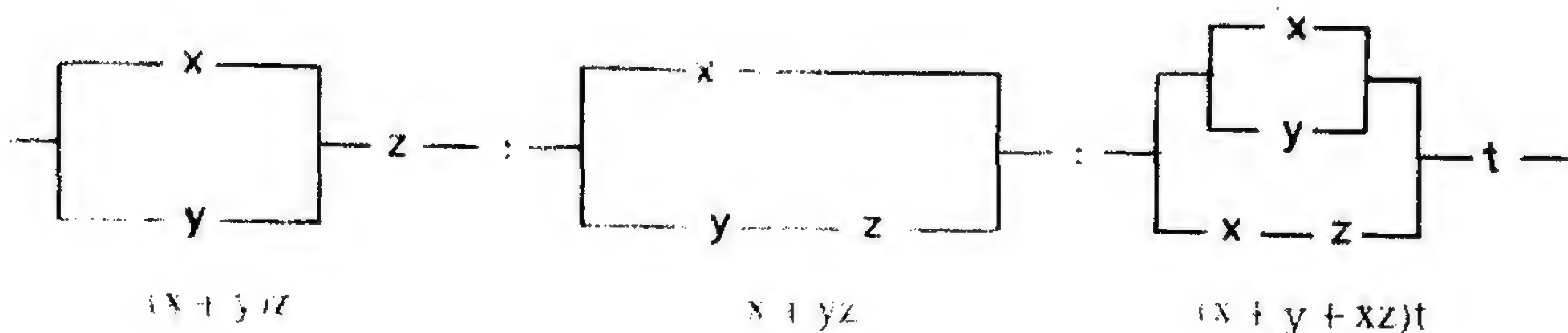
ملاحظه می شود که این جدول درست مثل جدول ارزش در کیمب عطفی دو گزاره است . همچنین این جدول نشان می دهد که جریان فقط در وضع اول (سطر اول) وجود دارد .
 ترکیب (انصال) موازی به شکل زیر اتصال دو کلید x و y را به صورت موازی نشان می دهد .



مدار حاصل از انصال موازی دو کلید x و y را به $x + y$ نشان می دهیم . جدول ارزش درستی این مدار چنین است :

x	y	$x + y$
۱	۱	۱
۱	۰	۱
۰	۱	۱
۰	۰	۰

ملاحظه می شود که این جدول نیز درست مانند جدول ارزش در کیمب فصلی دو گزاره است . همچنین این جدول نشان می دهد که جریان فقط در وضع آخر (سطر آخر) وجود ندارد و در سایر اوضاع (سطرها) جریان در مدار جاری است .
 می توان مدارهای حاصل از دو اتصال منوالی و موازی را نیز با هم ترکیب کرد و مدارهای پیچیده تری به دست آورد . در زیر چند نمونه از این مدارها نشان داده شده است .



طبق قرارداد ما در مورد ترتیب نوشتن عبارات منوالی و موازی ، ابتدا عبارات منوالی مدارهای فوق از چپ به راست به ترتیب با عبارت $(x + y + xz)t$ و $x + yz$ و $(x + y)z$ مشخص می شوند .

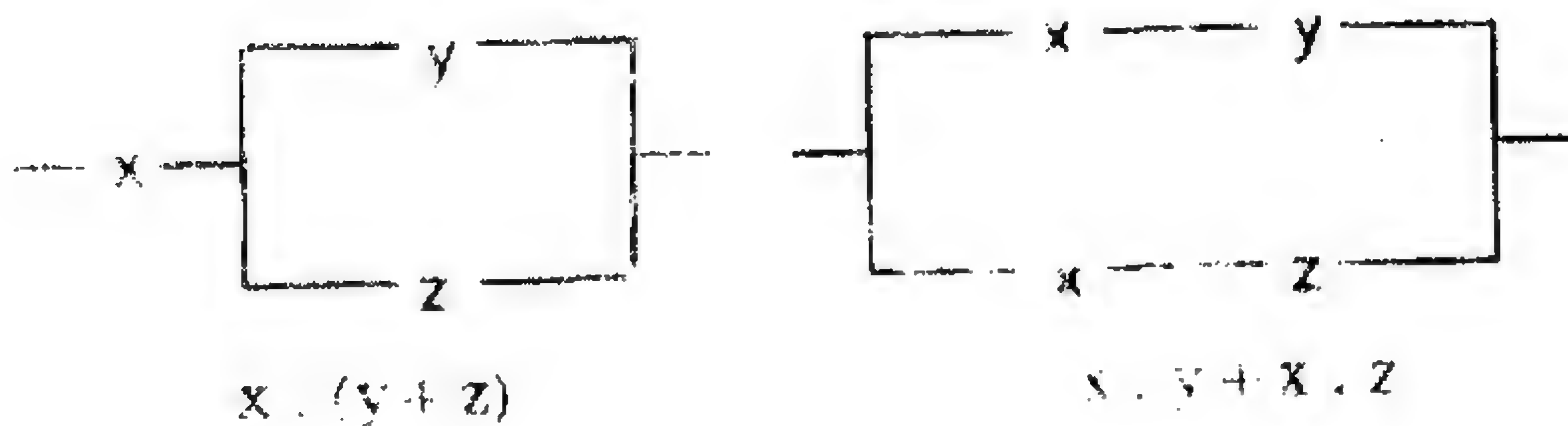
معرفی شده. ملاحظه می‌شود که اگر x و y به هم وصل شوند، این مدار به هم وصل می‌شود و به هم وصل می‌شود. مدارهای $x + y$ و $x + y + z$ به هم وصل می‌شوند. مثلاً مدار متناظر با عبارت $xyz + x'y + x'yz$ به هم وصل می‌شود:



تعریف ۱ - عبارتی که متناظر با یک مدار باشد عبارت بولی یا تابع بولی نامیده می‌شود.

تابع بولی مدار بالا عبارت است از $f = xyz' + x'(y + z')$ اگر $f = 1$ باشد و مدار جریان عبور می‌کند و اگر $f = 0$ باشد مدار فاقد جریان است.

تعریف ۲ - دومدار را معادل گوئیم هرگاه برای هر دسته از حالات کلیدها، هر دو مدار بسته یا باز (از آن عبور کند) و یا هر دو مدار باز (جریان در آن متوقف باشد) باشند به عبارت دیگر دومدار معادل گوئیم هرگاه هر دو در یک وضع باشند.
در زیر دومدار معادل رسم شده است.



در مدار سمت چپ، اولاً در حالتی که کلید x بسته است اگر کلید y یا z بسته باشد جریان از مدار عبور می‌کند، ولی اگر y و z با هم باز باشند مدار فاقد جریان است. ثانیاً در حالتی که کلید x باز است جریان در مدار متوقف است.

مدار سمت راست نیز در همین وضع است یعنی اولاً در حالتی که کلید x بسته است اگر کلید y یا z بسته باشد جریان از مدار عبور می‌کند ولی اگر y و z با هم باز باشند مدار فاقد جریان است. ثانیاً در حالتی که کلید x باز است جریان در مدار متوقف است.

توضیحات فوق در جدولهای زیر نمایان است .

x	y	z	x+z	x.(y+z)	x	y	z	xy	xz	xy+xz
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۱	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

جدولها نشان می دهند که دو عبارت بولی $x(y+z)$ و $xy+xz$ هم ارزشمند .
 تعریف ۳ - دو عبارت بولی را مساوی گوئیم هرگاه مدارهای متناظر آنها معادل یا جدولهای آنها هم ارزش باشند .
 دو عبارت بولی هم ارزش بالا ، یعنی $x(y+z)$ و $xy+xz$ با هم مساویند . این تساوی را به صورت زیر نشان می دهیم :

$$x(y+z) = xy+xz$$

به خصوص دو کلید x و y که با هم باز و با هم بسته می شوند به صورت $x=y$ نشان می دهیم .
 از آنچه گفته شد نتیجه می شود که تنها ویژگیهایی در مدارها مورد توجهند که مربوط به باز و بستن کلیدها باشند ، به عبارت دیگر ، در مدارها عواملی مورد بررسیند که تعیین می کنند چه موقع جریان در مدار وجود دارد یا چه موقع جریان متوقف است . بنابراین ما در مدارها به کمیت هایی مانند ، مقاومت ، شدت جریان ، زمان ، ... توجه نداریم .

جبر کلیدی - هر يك از اتصالهای متوالی و موازی عملی را در مجموعه کلیدها تعریف می کنند که ما آنها را به ترتیب به ، و + نشان دادیم .

مجموعه کلیدها ، همراه با دو عمل ، و + که دارای خاصیت های زیر می باشند ، يك دستگاه ریاضی تشکیل می دهد که به نام جبر کلیدی نامیده می شود .

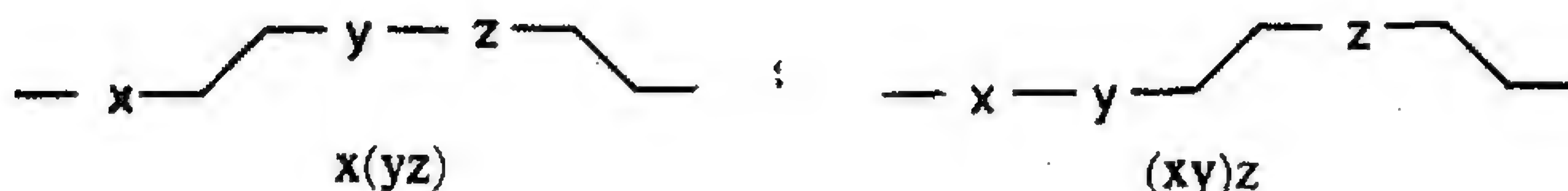
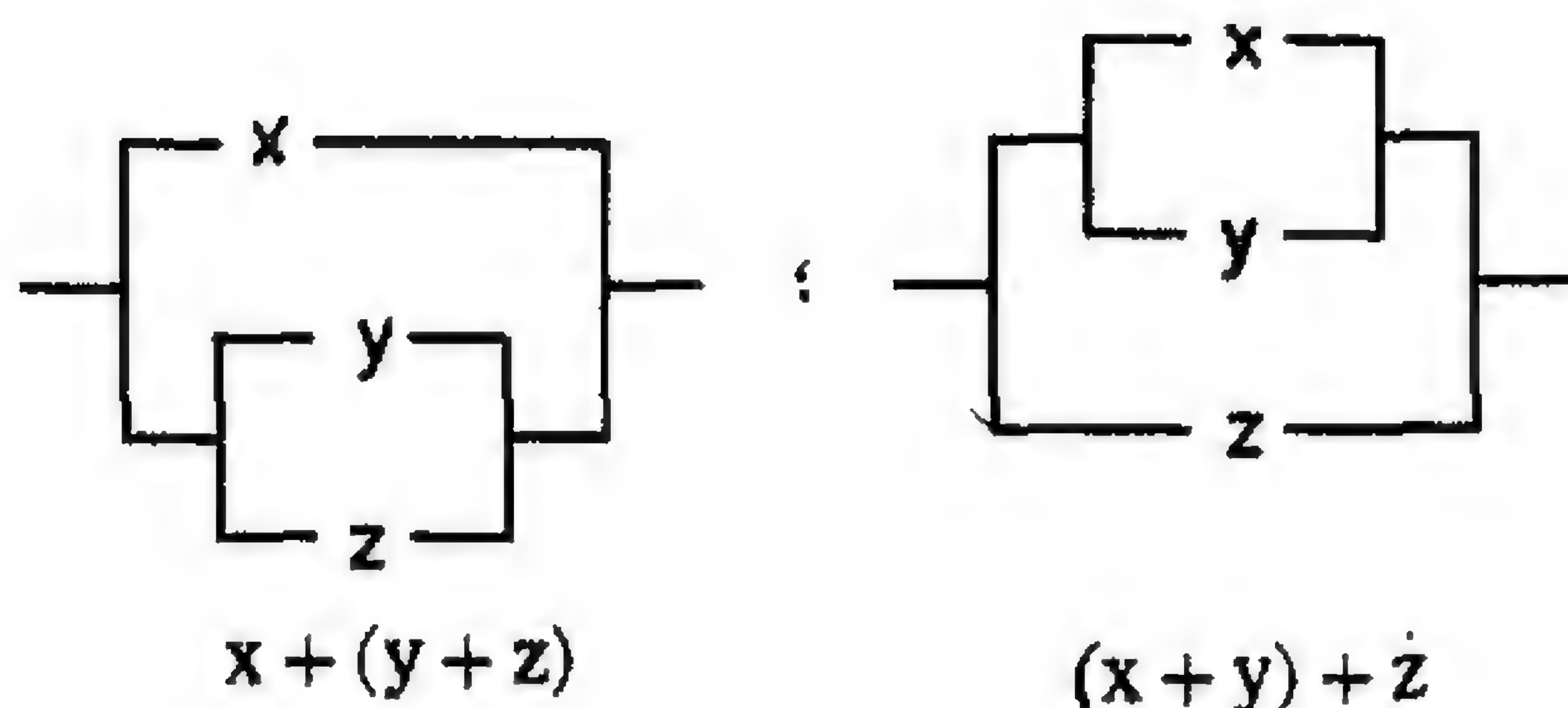
۱ - شرکت پذیری - هر يك از اعمال ، و + در مجموعه کلیدها شرکت پذیرند؛ یعنی

برای هر x و y و z داریم :

$$x+(y+z)=(x+y)+z$$

$$x(yz) = (xy)z$$

که مدارهای آنها به صورت زیر است :



و نظیر تساویهای زیر در مجموعه‌هاست .

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap Z$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup Z$$

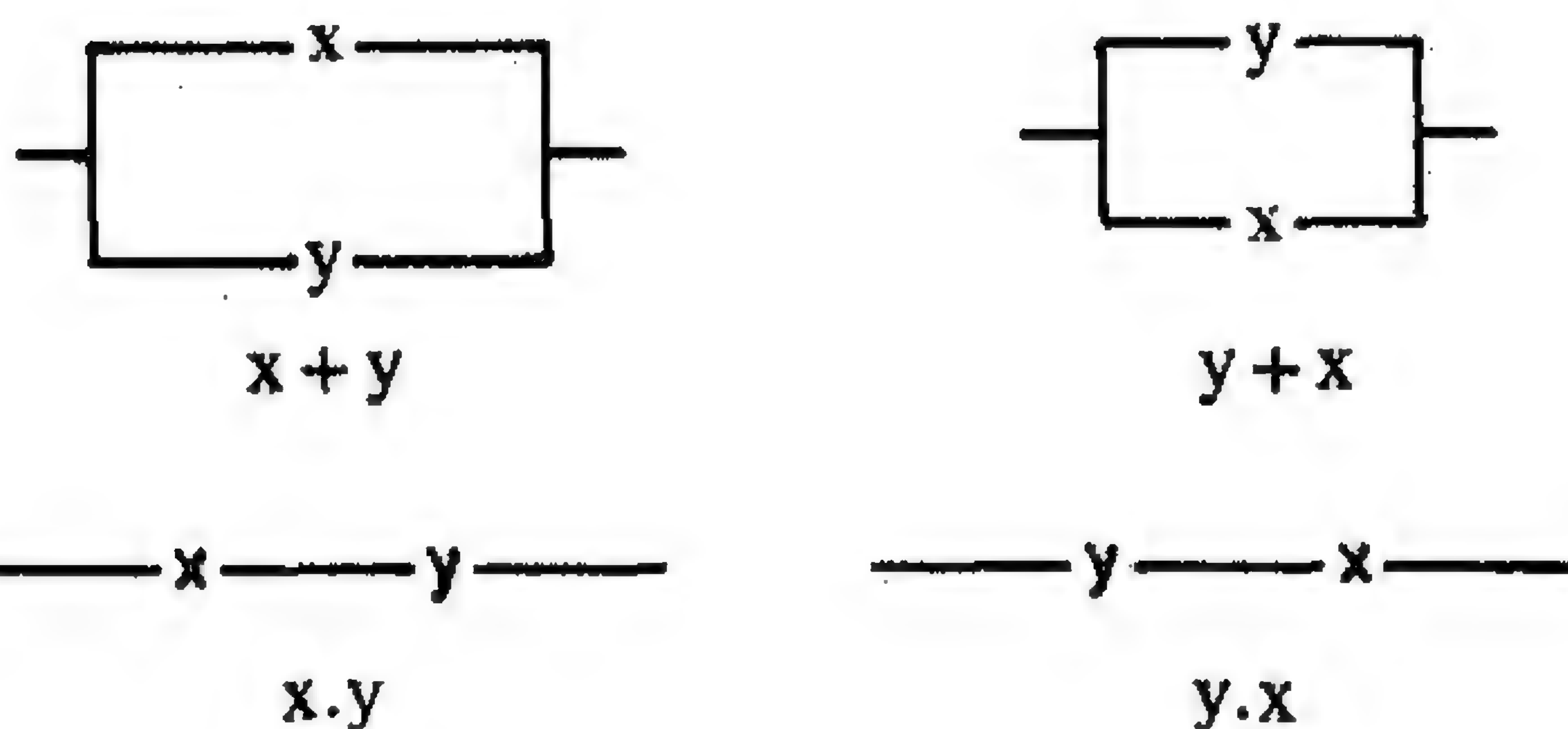
۲- جابجایی - هر یک از اعمال \cup و \cap در مجموعه کلیدها دارای خاصیت جابجایی هستند،

یعنی برای هر کلید x و y داریم :

$$x + y = y + x$$

$$xy = yx$$

که مدارهای آنها به صورت زیر است :



و نظیر تساویهای زیر در مجموعه‌ها می‌باشند .

$$X \cup Y = Y \cup X$$

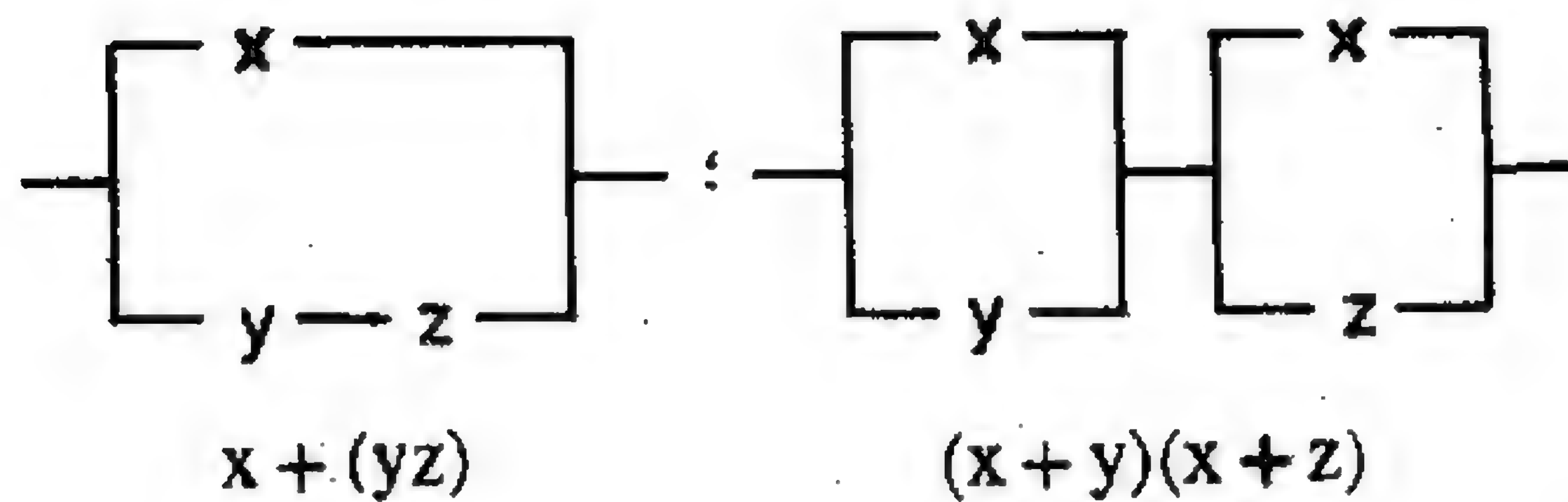
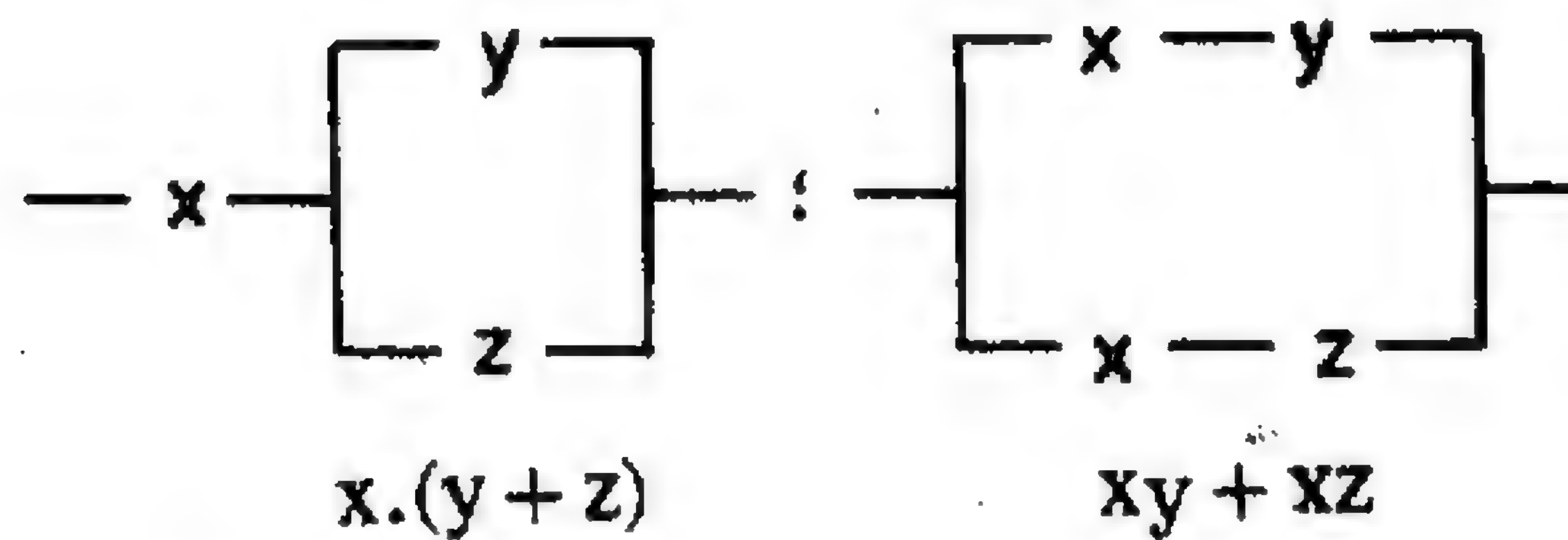
$$X \cap Y = Y \cap X$$

۳- پخش (توزیع پذیری) - هر يك از عملهای $+$ و \cdot نسبت به دیگری توزیع پذیر است.
یعنی برای هر x و y و z داریم :

$$x(y + z) = xy + xz$$

$$x + (yz) = (x + y)(x + z)$$

که مدارهای آنها به صورت زیر است :



و نظیر تساویهای زیر در مجموعه‌ها هستند .

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

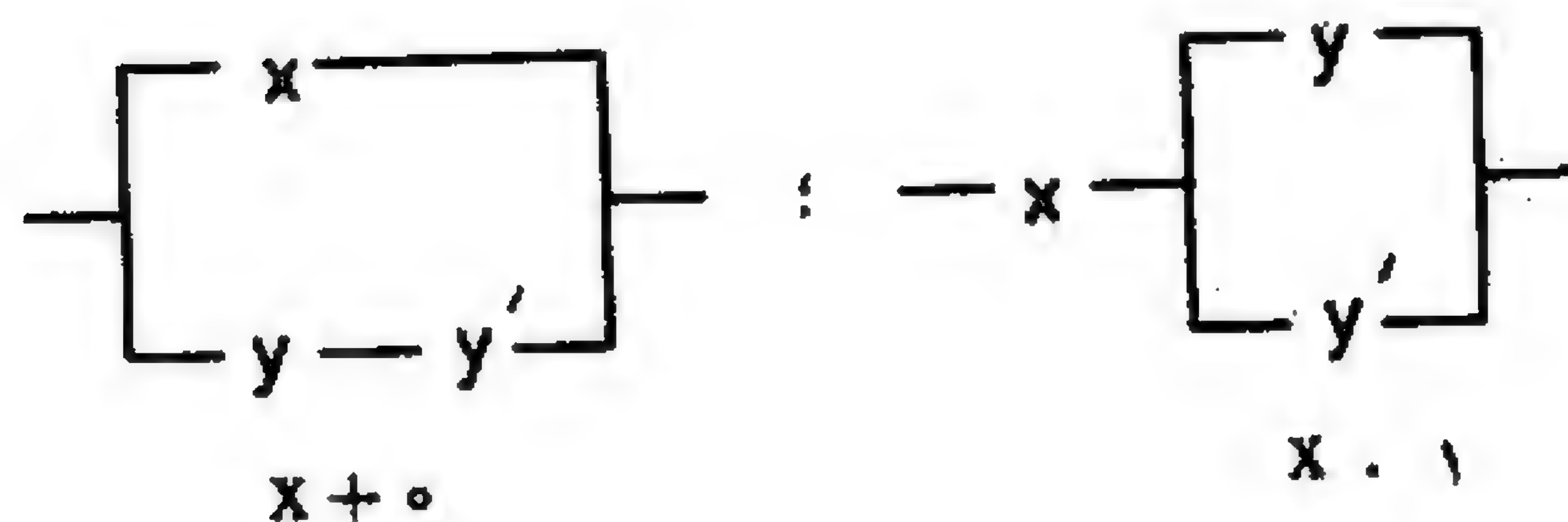
$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

۴- عضوهای بی‌اثر (کلیدهای ثابت) - برای هر کلید x داریم :

$$x + 0 = x$$

$$x \cdot 1 = x$$

که مدارهای آنها به صورت زیر است :



و نظیر تساویهای زیر در مجموعه‌ها هستند :

$$X \cup \emptyset = X$$

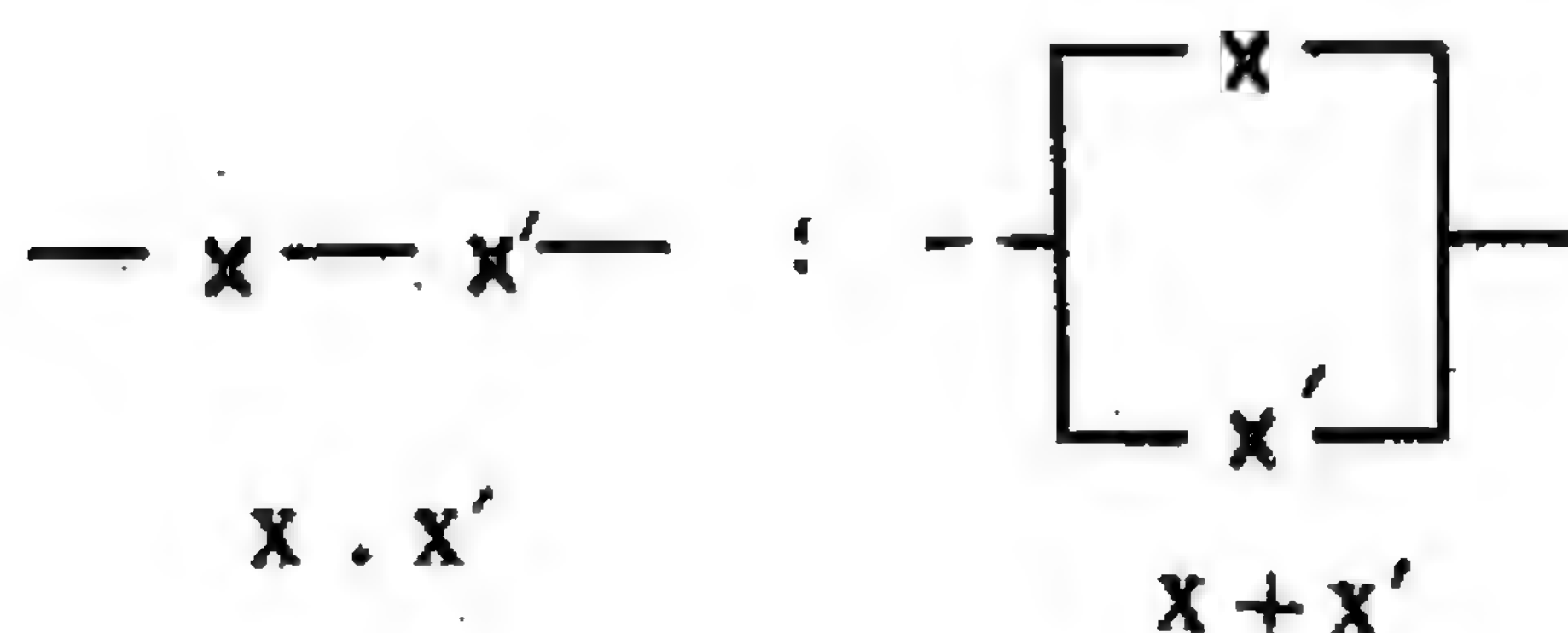
$$X \cap M = X$$

۵ - متمم گیری - برای هر کلید x ، کلیدی مانند x' داریم به گونه ای که :

$$x \cdot x' = 0$$

$$x + x' = 1$$

که مدار آنها به صورت زیر است :



و نظیر تساویهای زیر در مجموعه ها می باشند :

$$X \cap X' = \emptyset$$

$$X \cup X' = M$$

به طوری که هر مجموعه غیر تهی B همراه با دو عمل $+$ و \cdot (و $+$ و \cdot) که دارای خواص زیر باشد :

B_1 - شرکت پذیری :

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x + y) + z \\ \forall x, y, z \in B, \\ x(yz) &= (xy)z \end{aligned}$$

B_2 - جابجایی :

$$\begin{aligned} x + y &= y + x \\ \forall x, y \in B, \\ xy &= yx \end{aligned}$$

B_3 - پخش :

$$\begin{aligned} x \cdot (y + z) &= xy + xz \\ \forall x, y, z \in B, \\ x + (yz) &= (x + y)(x + z) \end{aligned}$$

B_4 - عضوهای بی اثر - عضوهای 0 و 1 موجودند به گونه ای که :

$$\begin{aligned} x + 0 &= x \\ \forall x, \\ x \cdot 1 &= x \end{aligned}$$

B_5 - متمم گیری :

$$\begin{aligned} x + x' &= 1 \\ \forall x \in B, \exists x' \in B, \\ xx' &= 0 \end{aligned}$$

به نام يك جبر بول خوانده می‌شود . این نامگذاری به خاطر ریاضی‌دان انگلیسی جرج بول (۱۸۶۴-۱۸۱۵) است که از این دستگاهها برای اولین بار برای مطالعه مجموعه‌ها و منطق استفاده کرد . جبر کلیدی ، همان طور که دیدیم دارای خواص پنجگانه بالاست ۱ و مثالی از جبر بول است .

مثال ۱- مجموعه گزاره‌ها همراه با اعمال \wedge و \vee يك جبر بول است .
(دو عبارت منطقی P و Q را معادل نامند هرگاه ارزشهای درستی آنها یکی باشد .
این دو عبارت معادل را به صورت $P \equiv Q$ نشان می‌دهند . بنابراین \equiv يك نوع تساوی منطقی است .)

هرگاه p, q, r سه گزاره و T يك گزاره درست و F يك گزاره نادرست باشد با استفاده از جدول درستی گزاره‌ها می‌توان درستی هم‌ارزیهای زیر را نشان داد .
۱- شریک پذیری:

$$\begin{aligned} p \vee (q \vee r) &\equiv (p \vee q) \vee r \\ q \wedge (q \wedge r) &\equiv (p \wedge q) \wedge r \end{aligned} \quad \forall p, q, r$$

۲- جابجایی

$$\begin{aligned} p \vee q &\equiv q \vee p \\ p \wedge q &\equiv q \wedge p \end{aligned} \quad \forall p, q$$

۳- پخش

$$\begin{aligned} p \wedge (q \vee r) &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{aligned} \quad \forall p, q, r$$

۴- عضوهای بی‌اثر: برای هر گزاره p داریم:

$$p \vee F \equiv p$$

$$p \wedge T \equiv p$$

۵- متمم‌گیری: برای هر گزاره p داریم:

$$p \vee (\sim p) \equiv T$$

$$p \wedge (\sim p) \equiv F$$

یعنی هرگاه P مجموعه گزاره‌ها باشد ، دستگاه (P, \vee, \wedge) يك جبر بول است .

مثال ۲- برای هر مجموعه X ، اگر مجموعه همه زیرمجموعه‌های آن را (مجموعه توانی X)

به $P(X)$ نشان دهیم دستگاه $(P(X), \cup, \cap)$ يك جبر بول است. زیرا همان‌طوری که دیدیم:

۱ - شرکت پذیری :

$$\forall A, B, C \in P(X), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

۲ - جابجایی

$$\forall A, B \in P(X) \quad A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

۳ - پخش

$$\forall A, B, C \in P(X) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

۴ - عضوهای بی‌اثر : برای هر A داریم :

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap M = A$$

۵ - متمم‌گیری : برای هر A داریم :

$$A \cup A' = M$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

بنابراین $(P(X), \cup, \cap)$ یک جبر بول است .

چند قضیه برای ساده‌کردن مدارها

درجبر مجموعه‌ها دیدیم که برای هر دو مجموعه A و B داریم :

$$A \cup A = A \quad ; \quad A \cap A = A$$

$$A \cup M = M \quad ; \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup (A \cap B) = A \quad ; \quad A \cap (A \cup B) = A$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad ; \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$M' = \emptyset$$

$$\emptyset' = M \quad \text{و} \quad (A')' = A$$

قضایای زیر نشان می‌دهد که این احکام در هر جبر بول و در نتیجه در جبر کلیدی نیز درست است

قضیه ۱ - اگر $(B, +, \cdot)$ یک جبر بول باشد، آن گاه برای هر b متعلق به B داریم :

$$b + b = b$$

الف -

$$b \cdot b = b$$

ب -

برهان - اگر b عضو دلخواه B باشد چنین می‌نویسیم :

الف -

$$\begin{aligned}
 b + b &= (b + b) \cdot 1 & : B_r \text{ بنابه} \\
 &= (b + b) \cdot (b + b') & : B_h \text{ بنابه} \\
 &= b + (bb') & : B_r \text{ بنابه} \\
 &= b + 0 & : B_h \text{ بنابه} \\
 &= b & : B_r \text{ بنابه}
 \end{aligned}$$

ب -

$$\begin{aligned}
 b \cdot b &= b \cdot (b + 0) & : B_r \text{ بنابه} \\
 &= b \cdot b + b \cdot 0 & : B_h \text{ بنابه} \\
 &= b \cdot (b + b') & : B_r \text{ بنابه} \\
 &= b \cdot 1 & : B_h \text{ بنابه} \\
 &= b & : B_r \text{ بنابه}
 \end{aligned}$$

قضیه ۲ - اگر $(B, +, \cdot)$ یک جبر بول باشد، آن گاه برای هر b متعلق به B داریم :

$$b + 1 = 1 \quad \text{الف -}$$

$$b \cdot 0 = 0 \quad \text{ب -}$$

پروهان - فرض کنیم b عضو دلخواهی از B باشد چنین می نویسیم :

الف -

$$\begin{aligned}
 b + 1 &= (b + 1) \cdot 1 & : B_r \text{ بنابه} \\
 &= (b + 1)(b + b') & : B_h \text{ بنابه} \\
 &= b + (1 \cdot b') & : B_r \text{ بنابه} \\
 &= b + b' & : B_r \text{ بنابه} \\
 &= 1 & : B_h \text{ بنابه}
 \end{aligned}$$

ب -

$$\begin{aligned}
 b \cdot 0 &= (b \cdot 0) + 0 & : B_r \text{ بنابه} \\
 &= (b \cdot 0) + (bb') & : B_h \text{ بنابه} \\
 &= b \cdot (0 + b') & : B_r \text{ بنابه} \\
 &= b \cdot b' & : B_r \text{ بنابه} \\
 &= 0 & : B_h \text{ بنابه}
 \end{aligned}$$

قضیه ۳ - در هر جبر بول برای هر a و b متعلق به B داریم :

$$a \cdot (a + b) = a \quad \text{الف -}$$

$$a + (a \cdot b) = a \quad \text{ب -}$$

پروهان :

الف -

$$a \cdot (a + b) = (a + 0) \cdot (a + b)$$

بنابه B_7 :

$$= a + (0 \cdot b)$$

بنابه B_7 :

$$= a + 0$$

بنابه قضیه ۲ :

$$= a$$

بنابه B_7 :

ب -

$$a + (a \cdot b) = (a \cdot 1) + (a \cdot b)$$

بنابه B_7 :

$$= a \cdot (1 + b)$$

بنابه B_7 :

$$= a \cdot 1$$

بنابه قضیه ۲ :

$$= a$$

بنابه B_7 :

قضیه ۴ - در هر جبر بول، عضو a' متناظر با عضو a منحصر به فرد است .

پروهان - فرض کنیم غیر از a' ، عضو دیگری مانند a_1 نیز متناظر با عضو a است به گونه ای که :

$$a + a_1 = 1 \quad \text{و} \quad a \cdot a_1 = 0$$

نشان می دهیم که $a' = a_1$. برای این منظور می نویسیم :

$$a' = 1a'$$

بنابه B_7 :

$$= (a + a_1)a'$$

بنابه فرض :

$$= (aa' + a_1a')$$

بنابه B_7 :

$$= 0 + a_1a'$$

بنابه B_8 :

$$= a_1a + a_1a'$$

بنابه فرض :

$$= a_1(a + a')$$

بنابه B_7 :

$$= a_1 \times 1$$

بنابه B_8 :

$$= a_1$$

قضیه ۵ - در جبر بول برای هر a داریم :

$$(a')' = a$$

$$a' + a = 1$$

پروهان - می دانیم که :

$$a' + (a')' = 1$$

به همین ترتیب $a a' = 0$ و $(a')' a' = 0$ پس طبق قضیه ۴ ، $a = (a')'$

قضیه ۶ - در هر جبر بول $1' = 0$ و $0' = 1$

برهان - طبق قضیه ۲ داریم (یا بنابه B_0) :

$$1 + 0 = 1$$

و چون بنابه B_0 نیز داریم:

$$1 + 1' = 1$$

همچنین داریم :

$$1 \cdot 0 = 0$$

چرا ؟

$$0' \cdot 0 = 0$$

چرا ؟

با توجه به قضیه ۴ ، نتیجه می شود $1' = 0$ و $0' = 1$

قضیه ۷ - (قوانین دمورگان) - در جبر بول برای هر a و b داریم :

$$(ab)' = a' + b' \quad \text{الف -}$$

ب -

$$(a + b)' = a'b'$$

برهان : الف - داریم:

$$(ab)(a' + b') = (ab)a' + (ab)b' \quad \text{بنابه } B_3 :$$

$$= (aa')b + a(bb') \quad \text{بنابه } B_1 \text{ و } B_2 :$$

$$= 0b + a0 \quad \text{بنابه } B_0 :$$

$$= 0 + 0 \quad \text{بنابه قضیه ۲ :$$

به همین ترتیب ثابت می شود $ab + (a' + b') = 1$

طبق قضیه ۴ ، $a' + b'$ همان $(ab)'$ است :

$$(ab)' = a' + b'$$

ب - داریم :

$$(a + b) \cdot a'b' = a \cdot (a'b') + b(a'b') \quad \text{چرا ؟}$$

$$= (aa')b' + a'(bb') \quad \text{چرا ؟}$$

$$= 0b' + a'0 \quad \text{چرا ؟}$$

$$= 0 + 0$$

به همین ترتیب ثابت می شود $(a + b) + a'b' = 1$

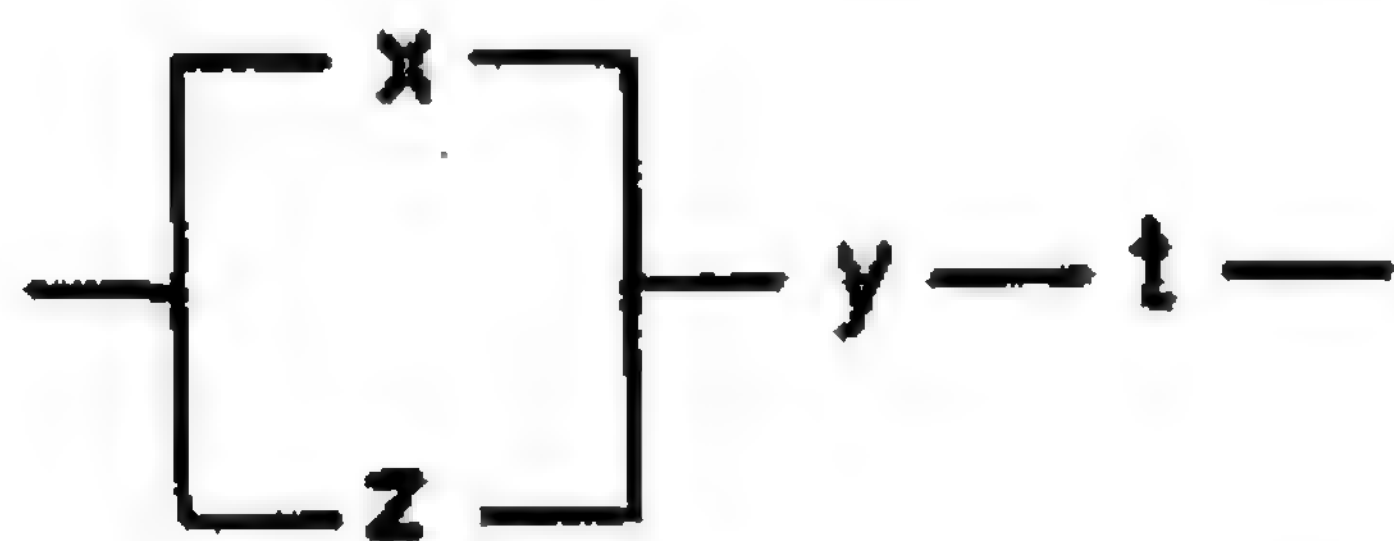
بنابه قضیه ۴ ، $a'b'$ همان $(a + b)'$ است :

$$(a + b)' = a'b'$$

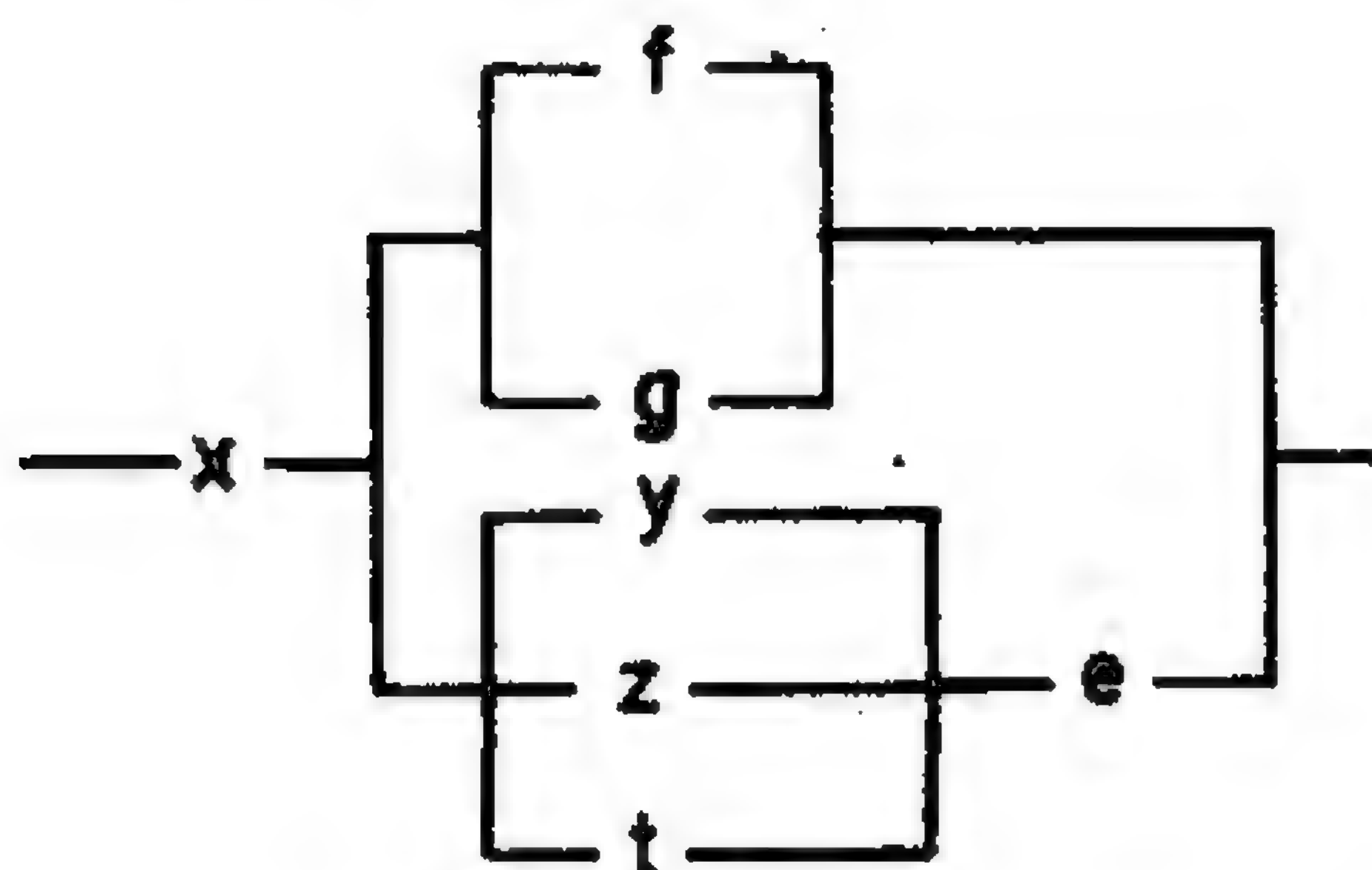
این قضایا در جبر گزاره ها نیز درست است

چند مثال : ۱- مدار عبارت بولی $(x+z)yt$ را رسم کنید.

حل -



۲- مدار زیر داده شده است عبارت بولی آن را بنویسید.



حل- طبق آنچه گفته شد داریم : $x[(f+g)+(y+z+t)e]$

۳- عبارات زیر را با استفاده از قوانین جبر کلیدی (جبر بول) ساده کنید :

الف -

$$xy + [(x+y')y]'$$

ب -
حل :

$$\{([x'y']' + z) \cdot (x+z)\}'$$

الف - بنابه قضیه ۷ : $xy + [(x+y') \cdot y]' = xy + [(x+y')' + y']$

بنابه قضیه ۵ و ۷ : $= xy + (x'y + y')$

بنابه B_7 : $= xy + [(x' + y') \cdot (y + y')]$

بنابه B_8 : $= xy + [(x' + y') \cdot 1]$

بنابه B_9 : $= xy + (x' + y')$

بنابه قضیه ۷ : $= xy + (xy)'$

بنابه B_8 : $= 1$

ب - بنابه قضیه ۷ : $\{([x'y']' + z) \cdot (x+z)\}' = [(x'y')' + z]' + (x+z)'$

بنابه قضیه ۵ و ۷ : $= [(x+y) + z]' + x'z'$

بنابه قضیه ۷ : $= (x+y)' \cdot z' + x'z'$

بنابه قضیه ۷ : $= x'y' \cdot z' + x'z'$

بنابه B_7 : $= x'z'(y' + 1)$

بنابه قضیه ۲ : $= x'z' \cdot 1$

$$= x'z'$$

بنابه B_p :

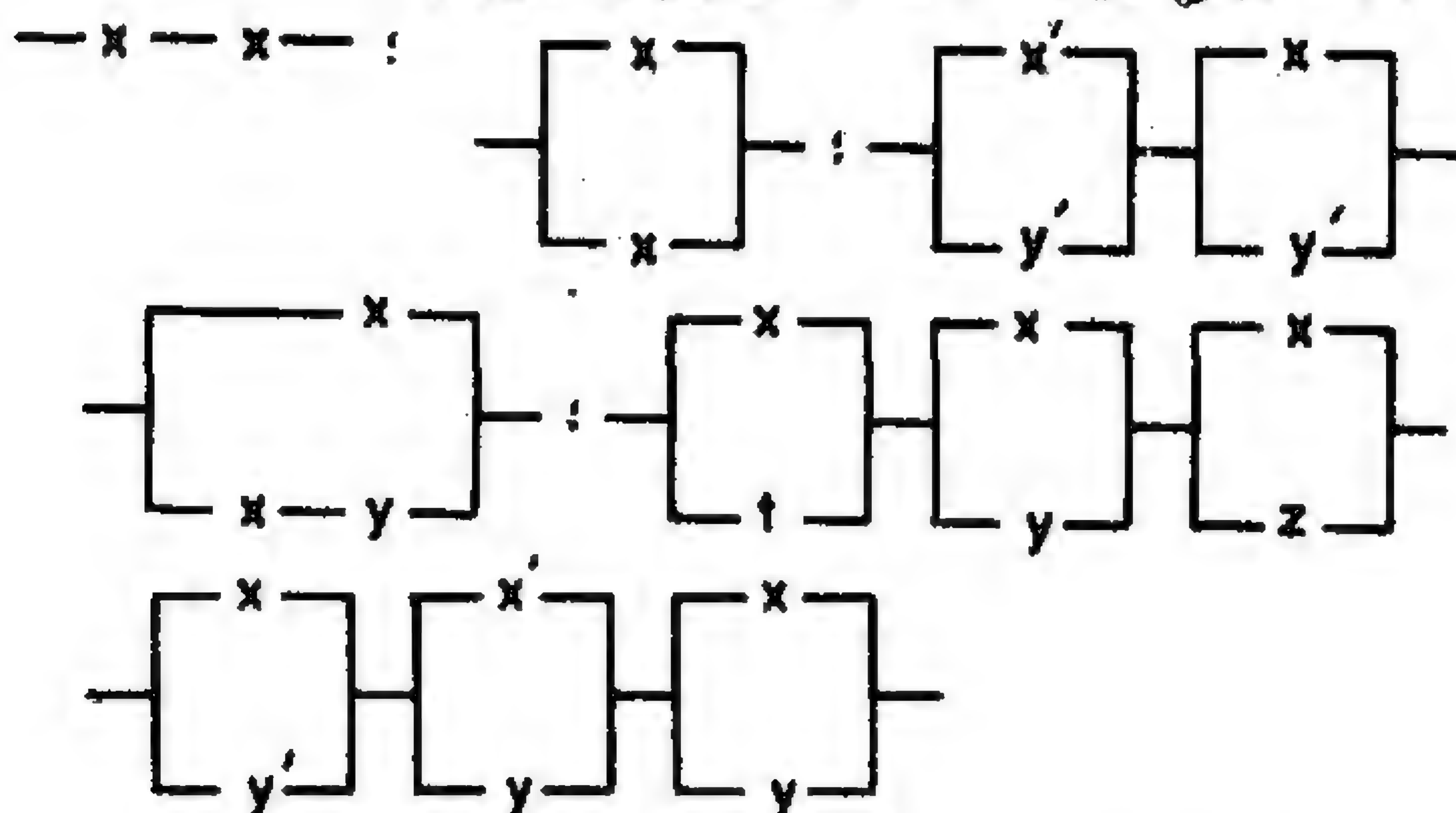
تمرین

۱ - مدار هر يك از عبارات بولی زیر را رسم کنید :

$$y + yz(t + x) \quad ; \quad x + y(x + z) \quad ; \quad t(x + y)(z + t) \quad ;$$

$$tx(yz + xt) + z \quad ; \quad \{[(x + y)z + xy]z + z\}t + xzt$$

۲ - عبارات بولی هر يك از مدارهای زیر را بنویسید .



۳ - با استفاده از قوانین جبر کلیدی (جبر بول) عبارات زیر را ساده یا تساویها را ثابت کنید .

$$x(x + 1) \quad ; \quad x + xy + y \quad ; \quad x(x + y)(y + z) \quad ;$$

$$(x + 1)(x + 1)(x + 1) \quad ; \quad x'y(x + y) \quad ; \quad xy(x' + y') \quad ;$$

$$(xyz)' = x' + y' + z' \quad \text{و} \quad (x + y + z)' = x'y'z' \quad ;$$

$$(a + b + x' + y' + z')(a + b + xyz) \quad ; \quad (x + y + z + t')(x + y + z + t)$$

$$\{[(x + y)z + xy]z + z\}t + xzt \quad ; \quad (a + b' + c')(a + bc) \quad ;$$

$$(a + b + c + d')(a + b + c + d)(a' + b + c')(a + b') \quad ;$$

$$x'yz + xy'z' + x'y'z + x'yz' + xy'z + x'y'z'$$

۴ - درستی تساویهای زیر را ثابت کنید :

$$ab + ab' = a \quad ; \quad (a + b) \cdot (a' + b') = a'b + ab' \quad ;$$

$$(a' + b') \cdot (a' + b) = a' \quad ; \quad (a + b) + ab' = a + b \quad ;$$

$$ab + ab' + a'b = a + b \quad ; \quad abc + ab'c + ac' = a \quad ;$$

$$abc + a'c + bc = c \quad ; \quad (a + b)[(a' + b')(a' + b)] = b \cdot a'$$

۵ - بدون استفاده از قانون دمورگان ثابت کنید:

$$(a + b) + a'b' = 1 \quad \text{و} \quad a'b' \times (a + b) = 0$$

۶ - با استفاده از مسئله ۵، $(a + b)' = a'b'$ را ثابت کنید.

۷ - ثابت کنید : $(a'b')' + (a+b)' = 1$ ؛ $(a' + b')' \times (ab)' = 0$

۸ - ثابت کنید : $(ab + ac + a'x'y)(ab'c + a'x'y' + a'by') = ab'c$

۹ - ثابت کنید : $x(x' + y) + y(y + z) + y = y$

۱۰ - متهم هر يك از عبارات زیر را نوشته آن را ساده نمایید :

$$(x + y)(x' + y)(x' + y') \quad ; \quad (x + y + z)(x' + y' + z')$$

$$(x' + y' + z)(x' + y' + z')$$

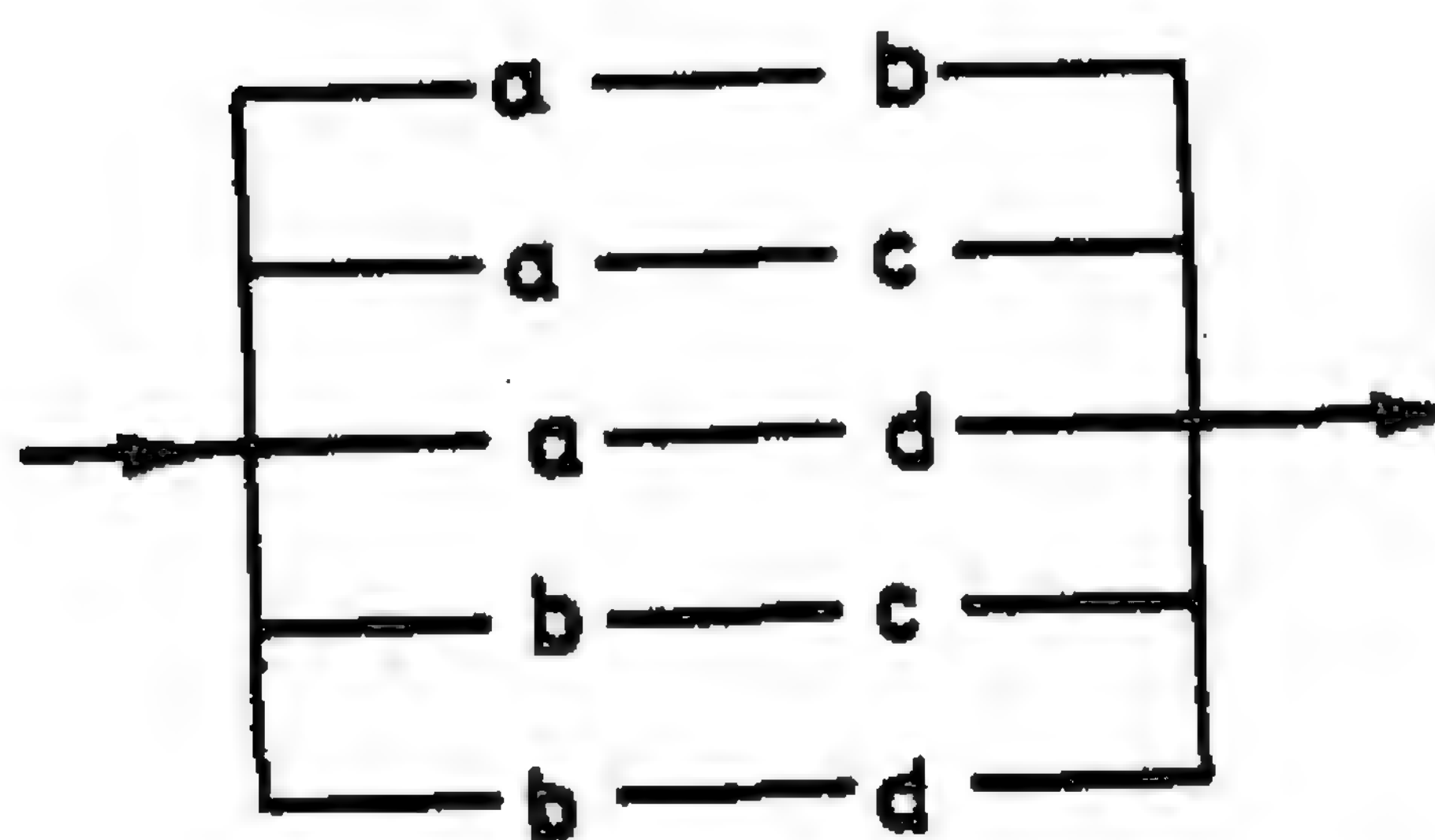
به طوری که دیدید جبر کلیدی يك جبر بول است و ما برای آن که مطلب را در حالت کلی بحث کرده باشیم قضایای قبل را در جبر بول ثابت کردیم . ولی این قضایا مربوط به جبر کلیدی نیز می باشد و ما از آنها در دو مورد زیر استفاده می کنیم :

۱ - ساده کردن يك مدار داده شده

۲ - طرح يك مدار با ویژگیهای خواسته شده

ساده کردن مدارها - ساده کردن مدارها اغلب با روش آزمایش و خطا صورت می گیرد. يك مهندس کار آزموده و ماهر در نتیجه تجربه هایی که به دست آورده است می تواند به نحو قابل ملاحظه ای مدارهایی را که قبلا نمونه های آنها را دیده است ساده نماید . اما برای ساده کردن مدارهای پیچیده در کامپیوتر روشهایی وجود دارد که از بحث ما خارج است . روش عمومی برای ساده کردن يك مدار این است که ابتدا عبارت بولی مدار داده شده را به دست می آوریم سپس با استفاده از قوانین جبر بول آنها را تا جایی که ممکن است ساده می کنیم آن گاه مدار عبارت ساده شده را رسم می کنیم .

مثال ۱ - مدار زیر را ساده کنید.



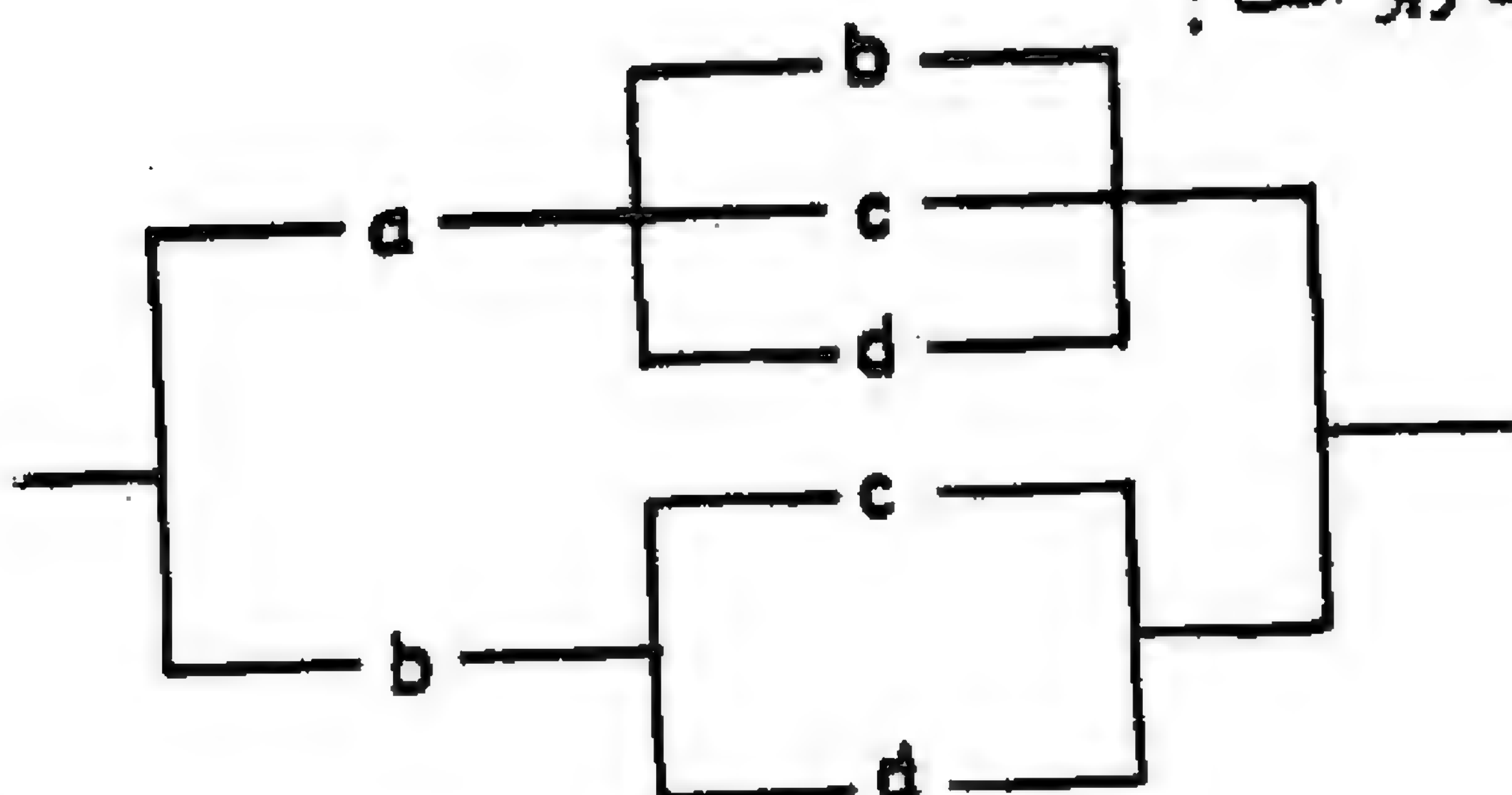
حل - عبارت بولی این مدار عبارت است :

$$ab + ac + ad + bc + bd$$

این عبارت با توجه به قوانین خوانده شده

به صورت $a(b + c + d) + b(c + d)$ نوشته

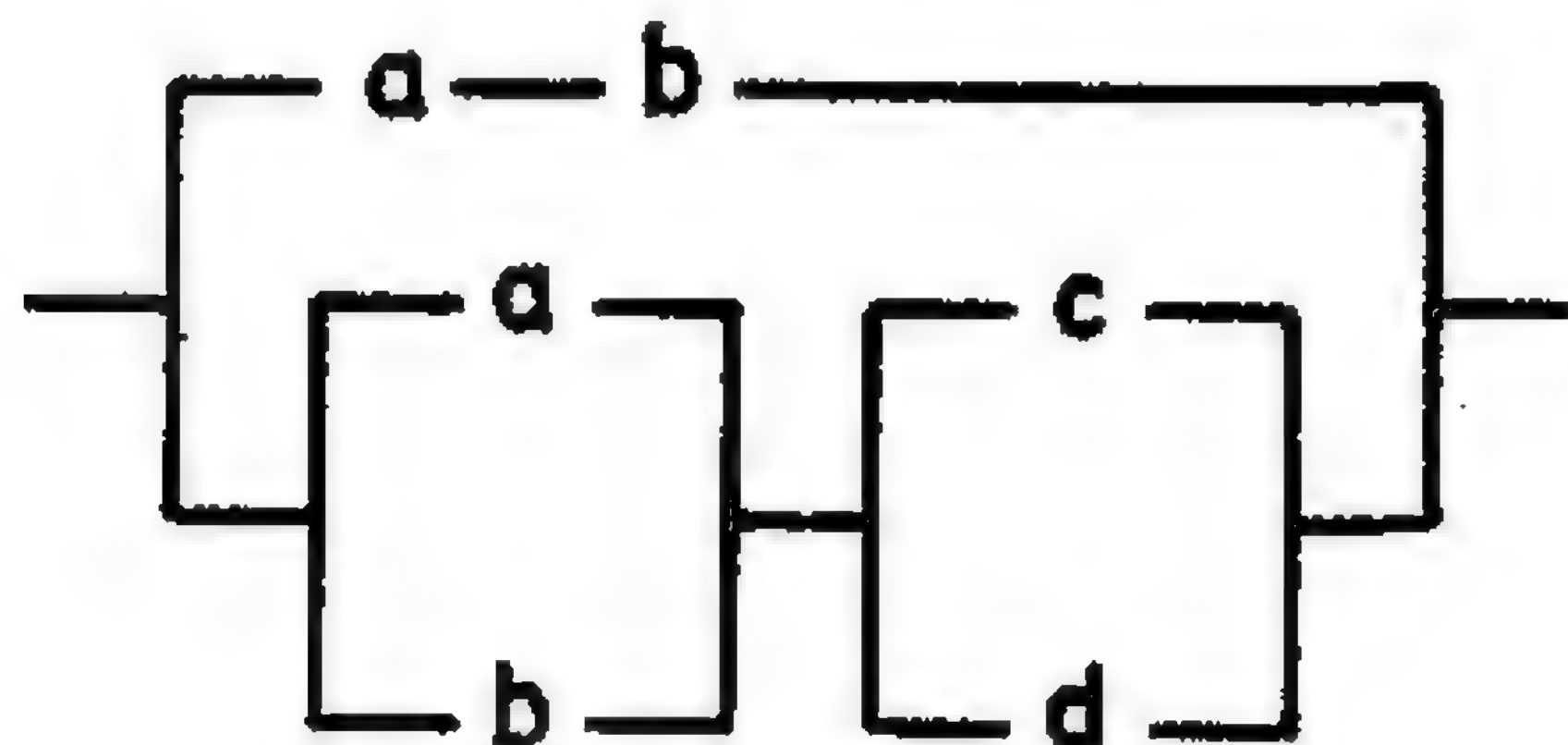
می شود که مدار آن به صورت زیر است :



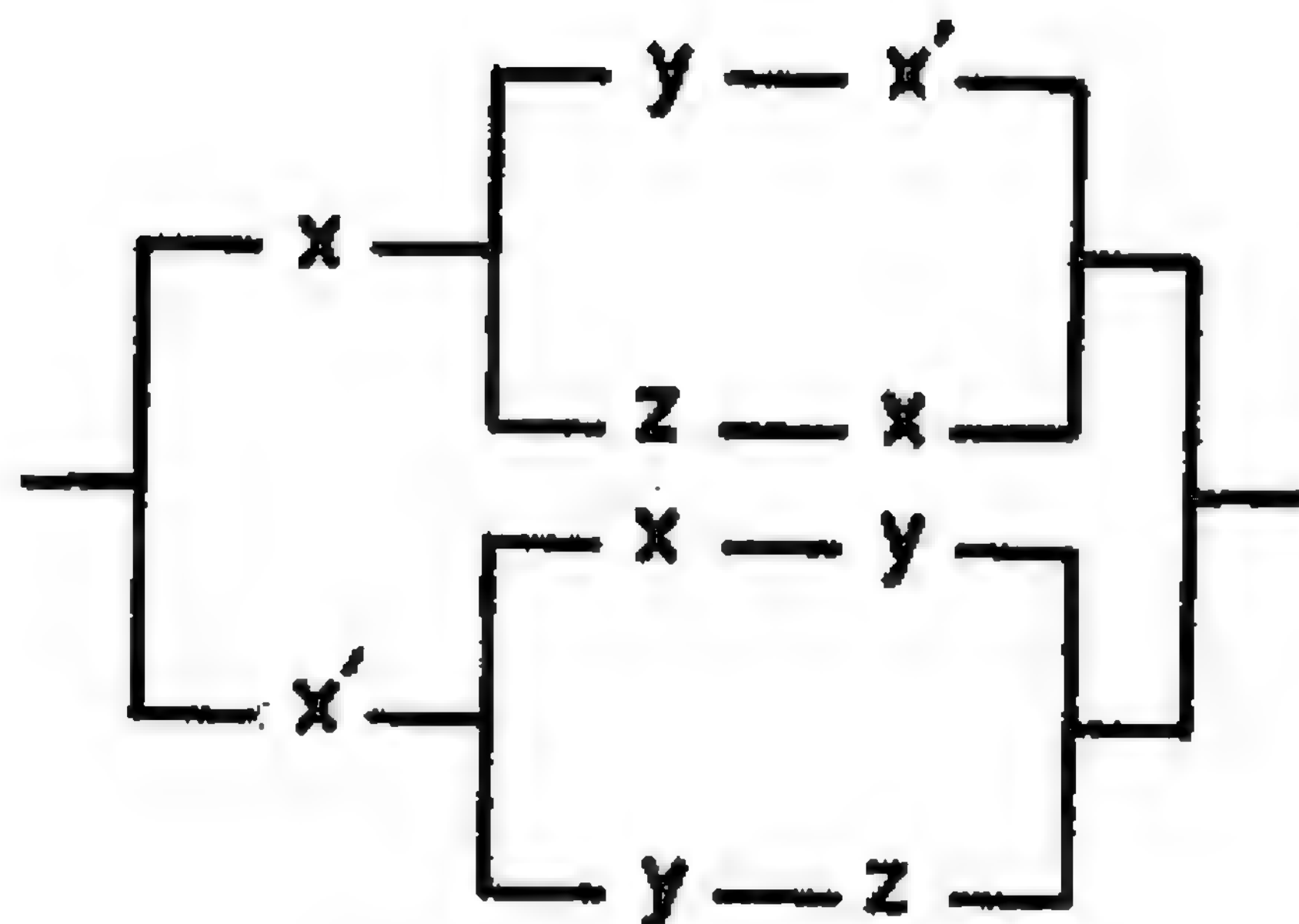
کار این مدار با مدار قبلی یکی بوده ولی تعداد کلیدهای آن کمتر است . عبارت فوق را به صورت زیر نیز می توان ساده کرد

$$ab + ac + ad + bc + bd = ab + (a + b)(c + d)$$

که مدار آن در زیر رسم شده است . تعداد کلیدها در این مدار به یک کلید تقلیل یافته است



مثال ۴ - مدار زیر را ساده کنید .



حل - هرگاه عبارت بولی مدار را به T نشان دهیم خواهیم داشت :

$$T = x(yx' + zx) + x'(xy + yz)$$

$$= x(yx') + x(zx) + x'(xy) + x'(yz) \quad : B_p$$

$$= x(x'y) + x(xz) + x'(xy) + x'(yz) \quad : B_1$$

$$= (xx')y + (xx)z + (x'x)y + x'(yz) \quad : B_p$$

$$= 0y + xz + 0y + x'(yz) \quad \text{چرا؟}$$

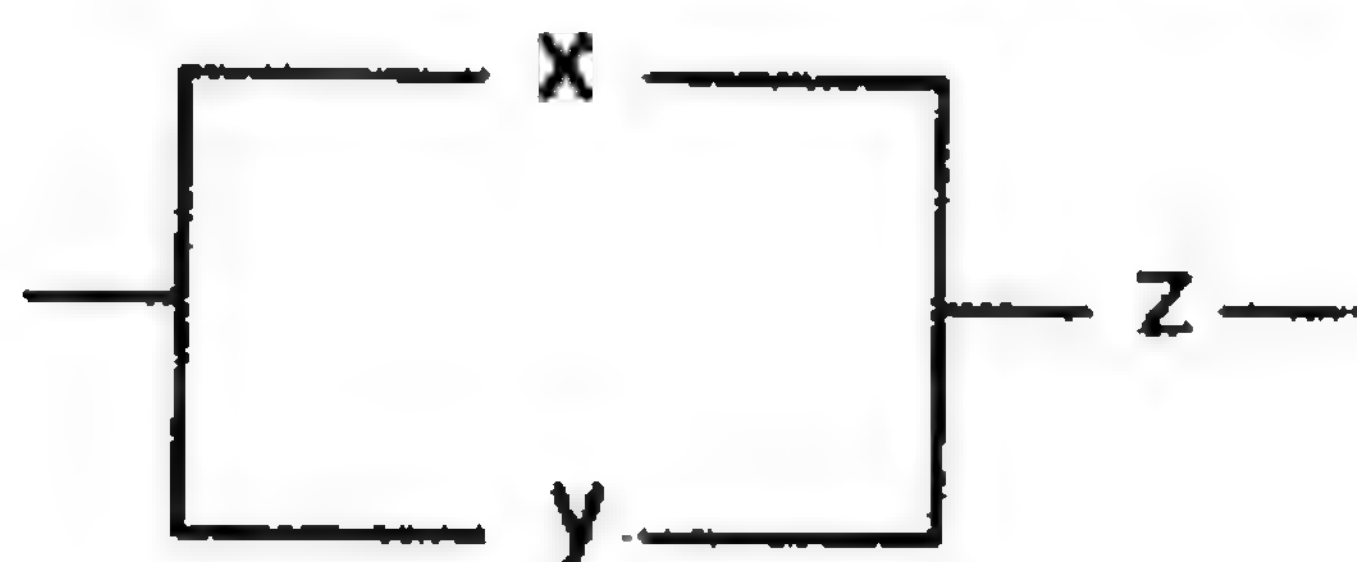
$$= 0 + xz + x'yz \quad \text{چرا؟}$$

$$= (x + x'y)z \quad \text{چرا؟}$$

$$= [(x + x')(x + y)]z \quad \text{چرا؟}$$

$$= (x + y)z \quad \text{چرا؟}$$

و مدار آن در زیر رسم شده است .



طرح ریزی مدارها - طرح ریزی يك مدار با ویژگیهای خواسته شده نظیر پیدا کردن گزاره‌ای است که جدول ارزش آن داده شده است . برای طرح يك مدار به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

۱- جدولی تنظیم می‌کنیم که حالات ممکنه را برای هر کلید در مدار مورد نظر مشخص کند.

۲- پس از تنظیم جدول ، تابع بولی آن را می‌نویسیم .

۳- تابع به دست آمده را با استفاده از قوانین جبر کلیدی (جبر بول) ساده می‌کنیم .

۴- مدار تابع ساده شده را رسم می‌کنیم .

مثال ۱ - می‌خواهیم لامپی را در يك راه پله به گونه‌ای نصب کنیم که این لامپ

به وسیله دو کلید یکی در پایین و دیگری در بالای پلکان روشن و خاموش شود . مدار لازم را طرح نمایید .

حل - ۱ - تنظیم جدول : این دو کلید را به x و y نشان داده مدار را طوری شروع می‌کنیم که وقتی هر دو کلید بسته باشد لامپ روشن گردد (یا می‌توان طوری شروع کرد که وقتی هر دو کلید بسته باشد لامپ خاموش باشد) . تابع بولی مدار را T نامیده برای آن جدول درستی به صورت زیر تنظیم می‌کنیم :

- در شروع فرض کردیم وقتی هر دو کلید بسته است ($x = 1$ و $y = 1$) ، لامپ روشن باشد . در این صورت داریم $T = 1$ (سطر اول) .

- کلید x را بسته نگهداشته ($x = 1$) ولی کلید y

را باز می‌کنیم ($y = 0$) در این صورت لامپ خاموش خواهد شد و داریم $T = 0$ (سطر دوم جدول) .

- کلید y را بسته نگهداشته ($y = 1$) ولی کلید x را

باز می‌کنیم ($x = 0$) در این صورت لامپ خاموش خواهد شد و داریم $T = 0$ (سطر سوم جدول) .

- بالاخره هر دو کلید x و y را با هم باز می‌کنیم ($x = 0$ و $y = 0$) در این صورت لامپ

مجدداً روشن خواهد شد و داریم $T = 1$ (سطر چهارم جدول) .

این حالات را که شامل تمام ترکیبهای ممکن دو کلید x و y است ، به صورت فوق وارد جدول می‌کنیم .

۲- تابع T را با استفاده از جدول می‌نویسیم . می‌بینیم که تابع در سطرهای دوم و سوم

دارای ارزش صفر است . یعنی وقتی که کلیدهای x و y در يك وضع نیستند جریان عبور نمی‌کند . چون در این دو وضع جریانی در مدار نیست می‌توان در این حالات مداری در نظر نگرفت . به عبارت دیگر ، بدون این که به نتیجه کار در حالت کلی مدار لطمه وارد آید، می‌توانیم

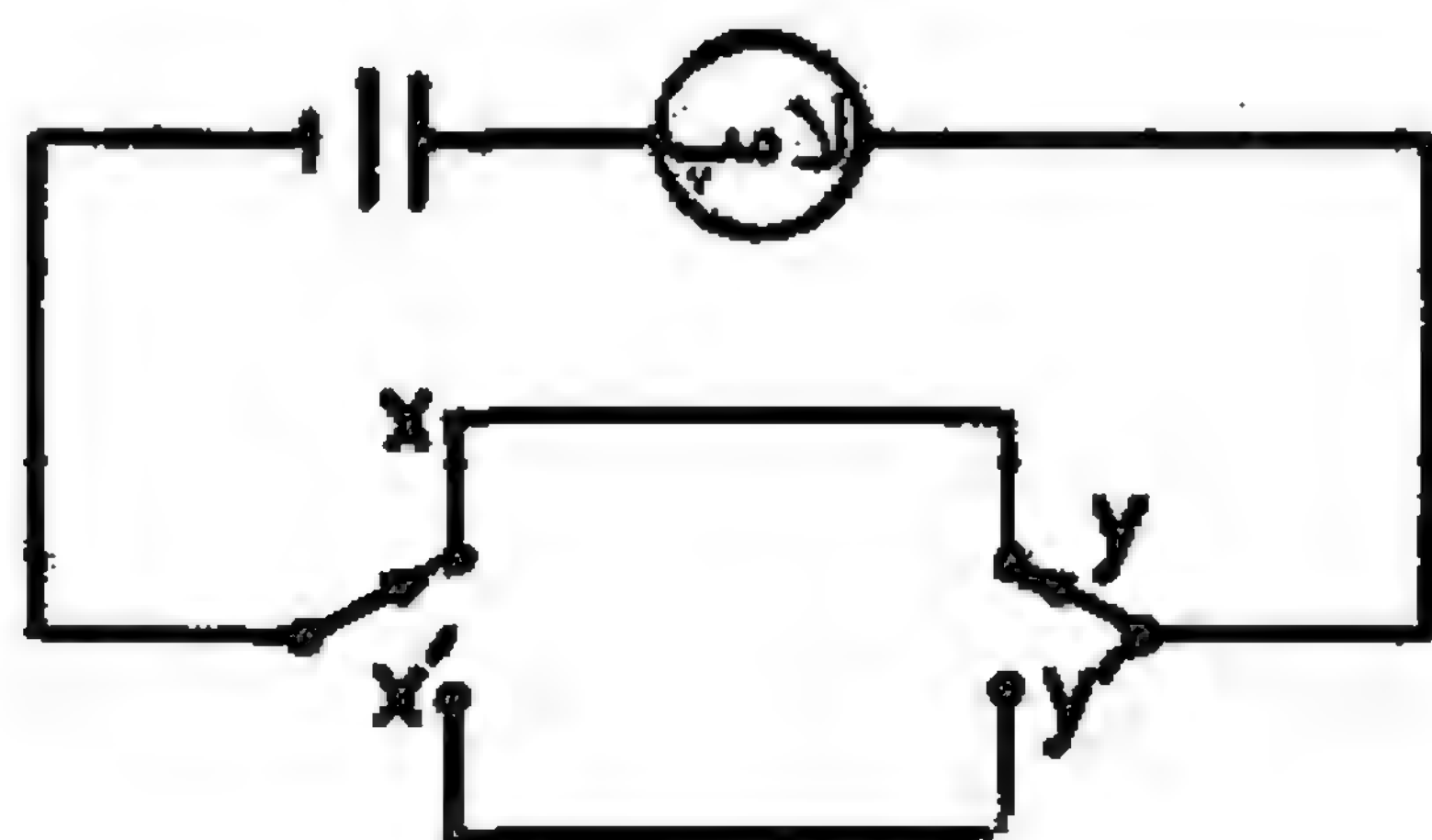
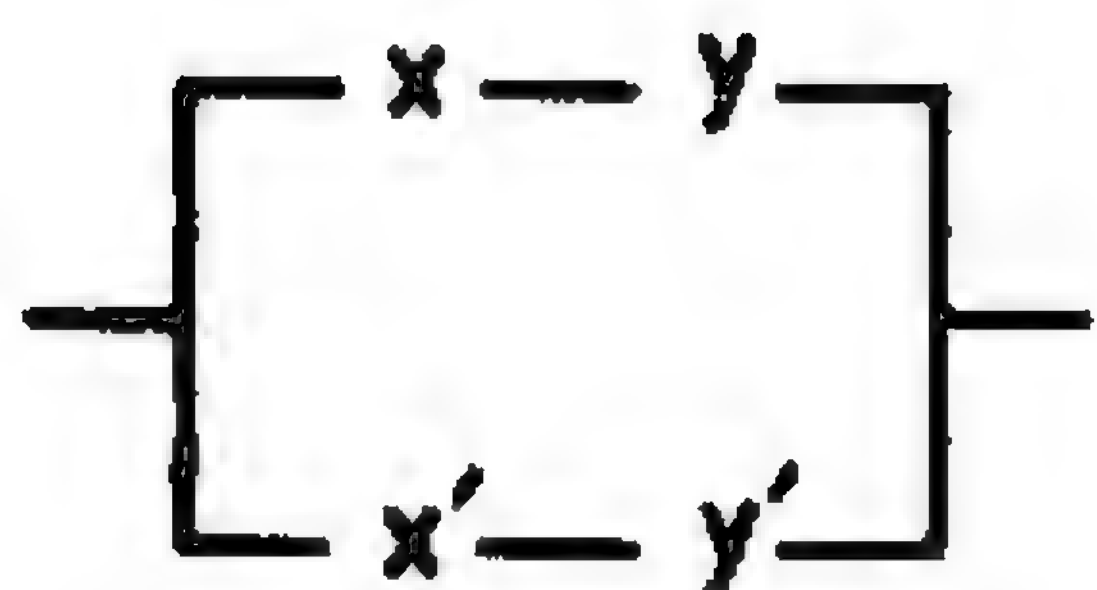
از این دو وضع صرف نظر کنیم . اما تابع در سطرهاى اول و چهارم داراى ارزش ۱ مى باشد،
یعنى در این دو حالت جریان در مدار وجود دارد . سطر اول را در نظر بگیرید ، اگر x و y
در اتصال متوالى باشند ، آن گاه ارزش تابع xy در سطر اول ۱ و در سایر سطرها صفر است .
به همین ترتیب ، تابع $x'y'$ در سطر چهارم داراى ارزش ۱ و در سایر سطرها ارزش آن صفر
است .

x	y	x'	y'	xy	$x'y'$
۱	۱	۰	۰	۱	۰
۱	۰	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۰	۱

هر گاه به جدول ارزش درستی اتصال دو کلید موازى نگاه کنیم مى بینیم که جدول مزبور
درست داراى ویژگی لازم برای ارتباط xy و $x'y'$ مى باشد . در آنجا کلید $a+b$ در صورتى
داراى ارزش ۱ است که داشته باشیم $a=1$ یا $b=1$.

xy	$x'y'$	$xy + x'y'$
۱	۰	۱
۰	۰	۰
۰	۰	۰
۰	۱	۱

یعنى جدول ارزش درستی عبارت $xy + x'y'$ درست همان جدولی است که ما در شروع حل
برای مسئله تشکیل دادیم پس تابع بولى مدار عبارت است : $T = xy + x'y'$.
۳- در اینجا عبارت $xy + x'y'$ به ساده ترین صورت خود نوشته شده است .
۴- در زیر مدار T به صورت ریاضی و فیزیکی رسم شده است .



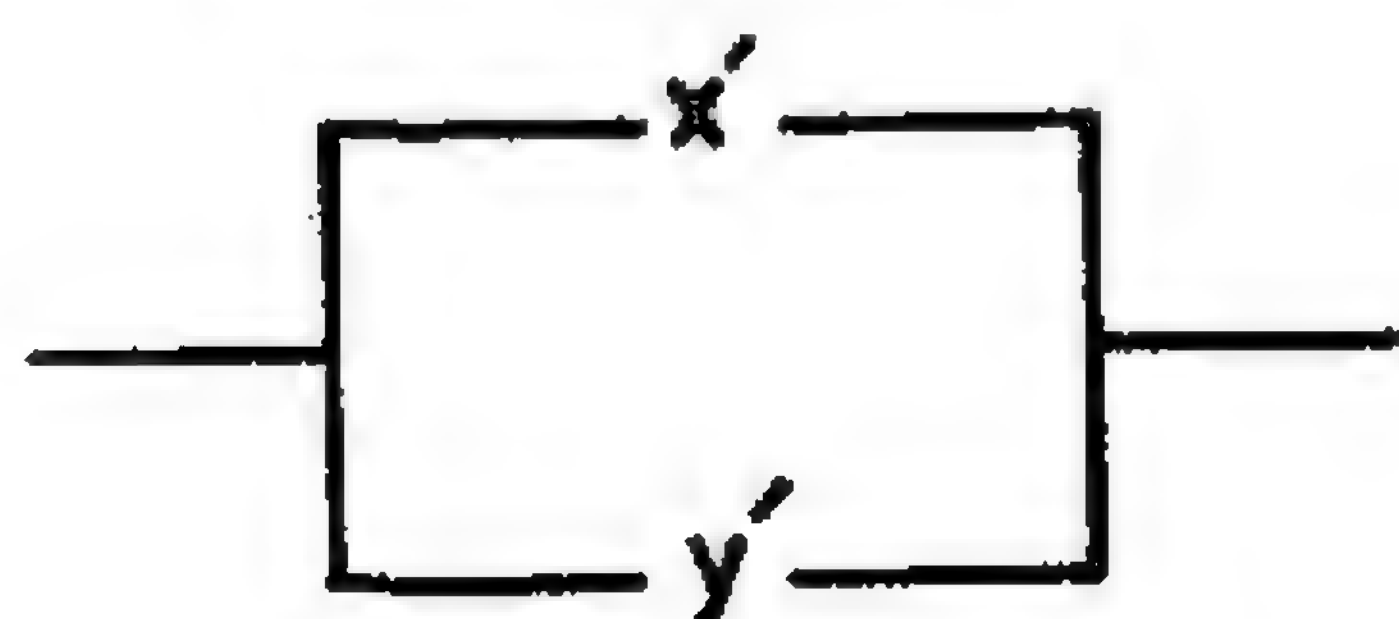
مثال ۲ - مداری که جدول ارزش آن در زیر داده شده است رسم کنید .

x	y	A
۱	۱	۰
۱	۰	۱ ←
۰	۱	۱ ←
۰	۰	۱ ←

حل - ارزش عبارت A در سه سطر آخر جدول برابر ۱ است . در این سه وضع جریان در مدار عبور می کند . طبق آنچه در مثال ۱ دیدید این عبارت از جمله های $x'y$ ، xy' ، $x'y'$ تشکیل شده است لذا عبارت بولی مدار برابر است با : $A = xy' + x'y + x'y'$. اکنون A را با استفاده از قوانین جبر بول ساده می کنیم .

$$\begin{aligned}
 A &= x'y + xy' + x'y' \\
 &= x'y + (x + x')y' && \text{بنابه } B_3 \\
 &= x'y + 1y' && \text{بنابه } B_4 \\
 &= x'y + y' && \text{بنابه } B_5 \\
 &= y' + x'y && \text{بنابه } B_6 \\
 &= (y' + x')(y' + y) && \text{بنابه } B_7 \\
 &= (y' + x')1 && \text{بنابه } B_8 \\
 &= y' + x'
 \end{aligned}$$

نمودار مدار در زیر رسم شده است .



مثال ۳ - مداری که جدول ارزش آن در زیر داده شده است رسم کنید .

x	y	z	f
۱	۱	۱	۱ ←
۱	۱	۰	۱ ←
۱	۰	۱	۰
۱	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰
۰	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۱ ←
۰	۰	۰	۰

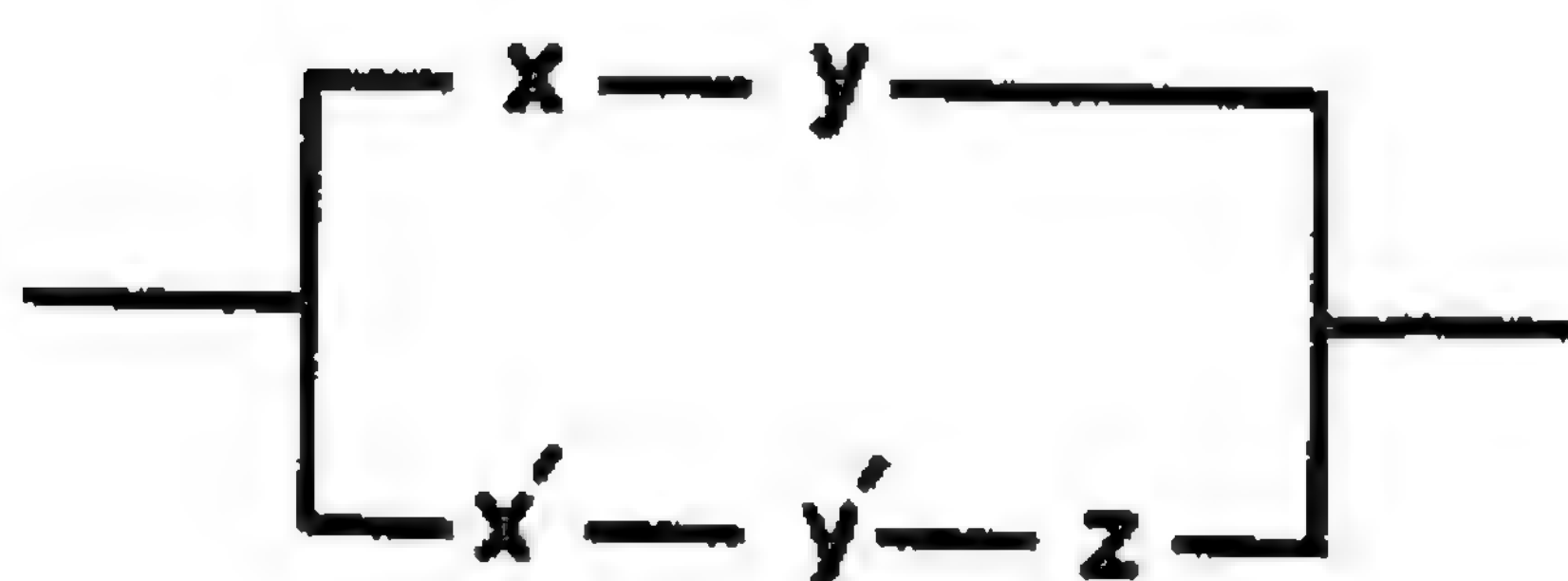
حل - طبق این جدول ، f در حالات xyz ، xyz' و $x'y'z$ برابر است (جریان در مدار می‌گذرد) پس:

$$f = xyz + xyz' + x'y'z \quad \text{بنابه جدول:}$$

$$= xy(z + z') + x'y'z \quad \text{بنابه } B_p:$$

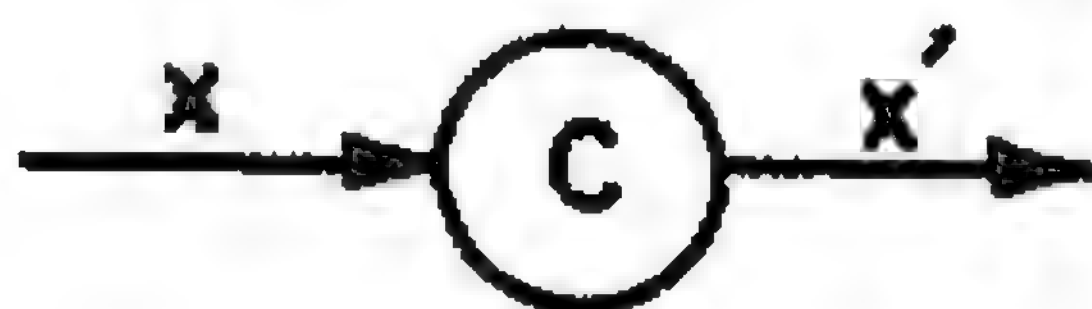
$$= xy + x'y'z \quad \text{بنابه } B_p \text{ و } B_h:$$

نمودار f در زیر رسم شده است:

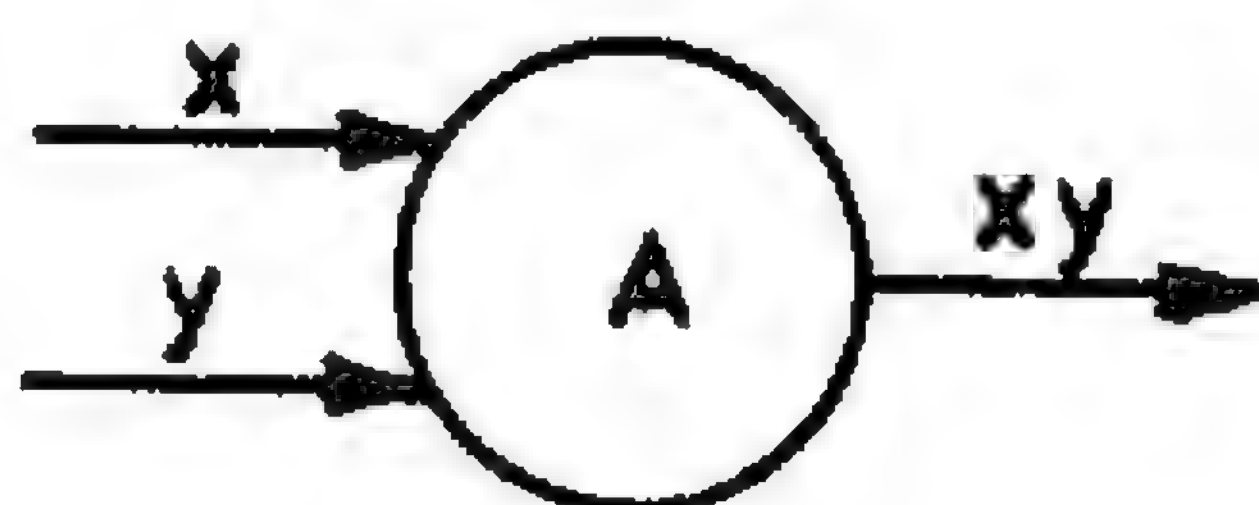


مدارهای کامپیوتر - عضوهای منطقی مدار: يك عضو منطقی مدار را می‌توان به مثابه جعبه یا بسته کوچکی در نظر گرفت که از يك یا چند هادی ورودی (سیم ارتباطات) و يك یا بیشتر هادی خروجی تشکیل شده است. هادیها علائمی با ولتاژ مثبت متناظر با ۱ یا ولتاژ صفر متناظر با ۰ می‌فرستند معمولا حروف x ، y ، ... را برای نشان دادن يك هادی (سیم) به کار می‌برند. وقتی هادی x يك علامت می‌فرستد گفته می‌شود x دارای ارزش ۱ است و وقتی هادی علامت نمی‌فرستد x دارای ارزش ۰ است. این قرارداد تاحدی با قراردادی که قبلا برای کلیدهای بسته و باز به کار بردیم فرق دارد به عبارت دیگر در اینجا ما هادی که يك علامت می‌فرستد به عنوان يك مدار بسته (دارای ارزش ۱) و هادی که علامت نمی‌فرستد به عنوان يك مدار باز (دارای ارزش ۰) در نظر می‌گیریم. عضوهای منطقی مدار را معمولا با يك دایره که يك حرف داخل آن نوشته شده و خطهایی که ورودیها و خروجیها را مشخص می‌سازد نشان می‌دهند. پیکانهای روی این خطها ورودی و خروجی مدار را مشخص می‌کنند. پیکانی که به طرف دایره است ورودی و دیگری خروجی مدار است. عضوهای منطقی مدار عبارتند از:

۱- مدار منطقی متمم - این مدار دارای يك ورودی و يك خروجی است که تابع آنها متمم یکدیگرند. بدین معنا که اگر ارزش ورودی مدار ۱ باشد، آن گاه ارزش خروجی آن ۰ است و بالعکس. نمودار این مدار در زیر رسم شده است.



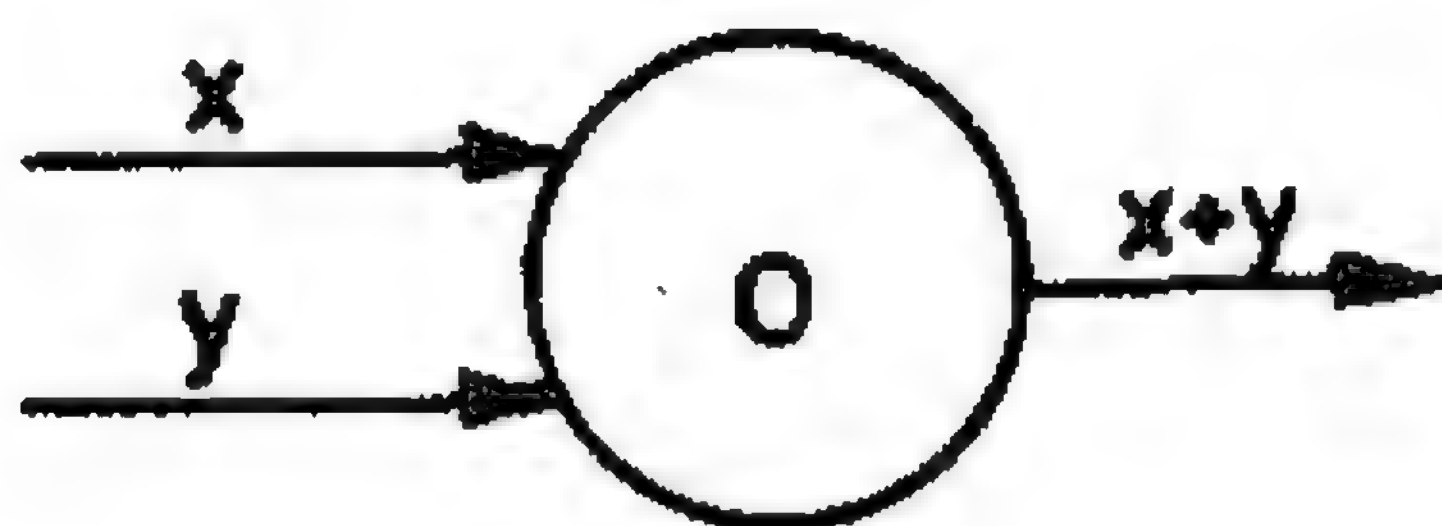
۲- مدار عطفی - این مدار متناظر است با رابط منطقی «و» در جبر گزاره‌ها و دارای دو یا بیشتر هادی ورودی بوده ولی فقط دارای يك خروجی می‌باشد. نمودار این عضو منطقی در زیر



رسم شده است.

این مدار منطقی وقتی يك علامت به خارج می فرستد^۱ (دارای ارزش خروجی ۱ است) که فقط فقط هريك از ورودیهای آن يك علامت بفرستند (هر ورودی دارای ارزش ۱ باشد). هرگاه ورودیهای این مدار منطقی را به x و y نشان دهیم، خروجی با توجه به قراردادهای جبر کلیدی به صورت xy نوشته می شود.

۳- مدار فصلی - این مدار منطقی متناظر است با رابط منطقی «یا» در جبر گزاره ها و دارای دو یا چند ورودی بوده ولی دارای يك خروجی است. مدار وقتی يك علامت به خارج می فرستد (دارای ارزش خروجی ۱ است) که اقلا یکی از ورودیهای آن يك علامت بفرستد (دارای ارزش ۱ باشد). اگر ورودیهای این مدار را با x و y نشان دهیم خروجی این مدار با توجه به قراردادهای جبر کلیدی به صورت $x+y$ خواهد بود. نمودار این مدار در زیر رسم شده است.



۴- مدار نیمه افزاینده - در سالهای قبل عددنویسی در مبنای ۲ را دیدید.

اعداد در مبنای ۲	اعداد در مبنای ۱۰	اعداد در مبنای ۲	اعداد در مبنای ۱۰
۱	۱	۱۰	۱۰۰۰
۲	۱۰	۱۱	۱۰۰۱
۳	۱۱
۴	۱۰۰	۲۷	۱۱۰۱۱
۵	۱۰۱
۶	۱۱۰	۴۰	۱۰۱۰۰۰
۷	۱۱۰
۸	۱۰۰۰	۱۰۰	۱۱۰۱۰۰
۹	۱۰۰۱
		۱۶۵	۱۰۱۰۰۱۰۱

علت یادآوری عددنویسی در مبنای ۲ این است که بیشتر کامپیوترها اعمال جمع را در مبنای ۲

۱- این علامت ممکن است به صورت عبور جریان یا روشن شدن يك چراغ یا زدن يك بوق یا ضربه کوتاه باشد.

انجام می دهند :

$$\begin{array}{r} 29 + \\ 12 \\ \hline 41 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 11101 + \\ 1100 \\ \hline 101001 \end{array}$$

اخیراً بعضی از کامپیوترها با مبنای ۸ یا ۱۶ نیز کار می کنند . در جمع دورقم ، هرگاه حاصل جمع دورقمی گردد رقم دوم را که همان ۲ بريك است درست چپ رقم اول می نویسیم .

$$\begin{array}{r} 1 + \\ 1 \\ \hline 10 \end{array}$$

در این صورت رقم سمت راست یعنی صفر را به S و رقم سمت چپ یعنی ۱ (همان دوبريك) را به C نمایش می دهیم . برای جمع دورقم حالات زیر را در نظر می گیریم :

مجموع در مبنای ۲			
رقم اول	رقم دوم	C	S
۱	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۱
۰	۱	۰	۱
۰	۰	۰	۰

این رقمها را به x و y نشان داده توابع بولی C و S را با توجه به آنچه راجع به طرح مدارها گفته شد می نویسیم . جدول فوق را به دوجداول زیر تجزیه می کنیم :

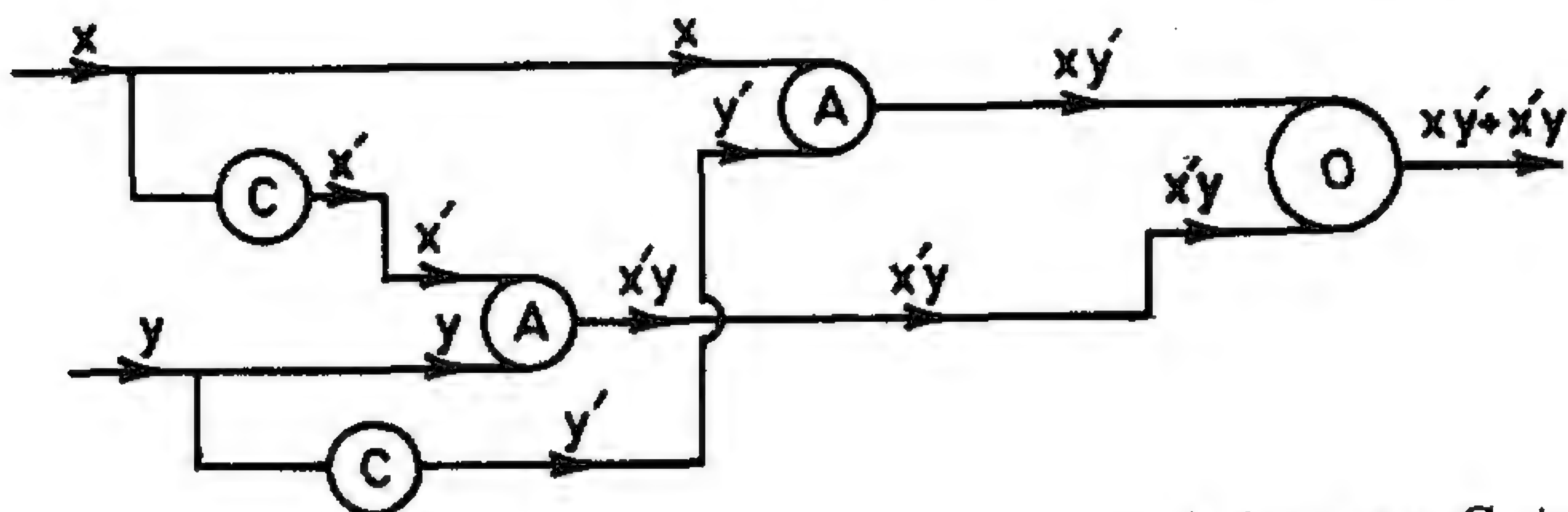
x	y	C	x	y	S
۱	۱	۱ ←	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۱	۰	۱ ←
۰	۱	۰	۰	۱	۱ ←
۰	۰	۰	۰	۰	۰

طبق آنچه قبلاً دیدیم خواهیم داشت :

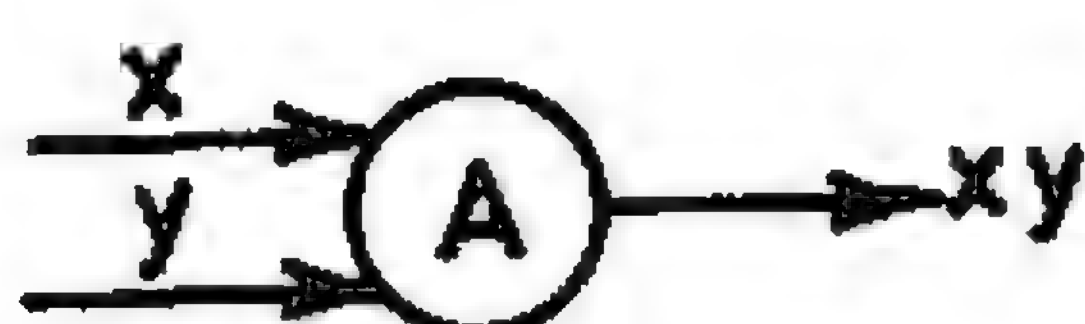
$$C = xy \quad \text{و} \quad S = xy' + yx'$$

حال مدار این توابع را با استفاده از عضوهای منطقی مدارها تشکیل می دهیم . مدار S شامل دوکلید x' و y' بوده که برای هريك نیاز به يك مدارمتمم است . همچنین دو عبارت xy' و x'y وجود دارد که احتیاج به دومدار عطفی دارد . بالاخره يك عبارت به صورت xy' + x'y

که نیاز به يك مدار فصلی دارد . مدار S در زیر رسم شده است .



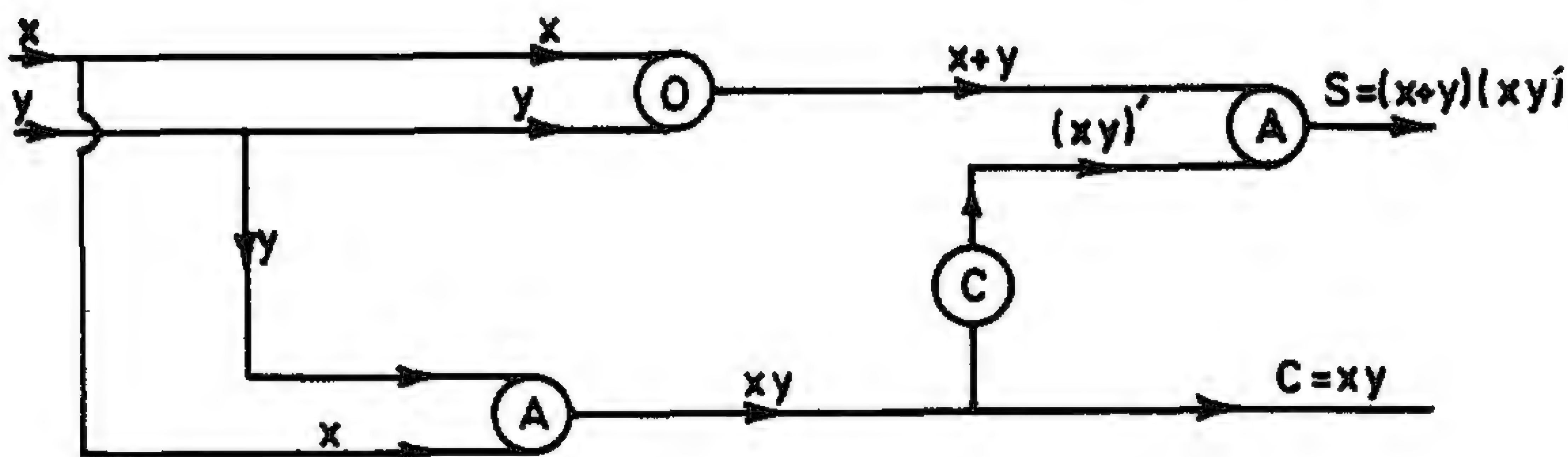
و مدار C به صورت زیر است :



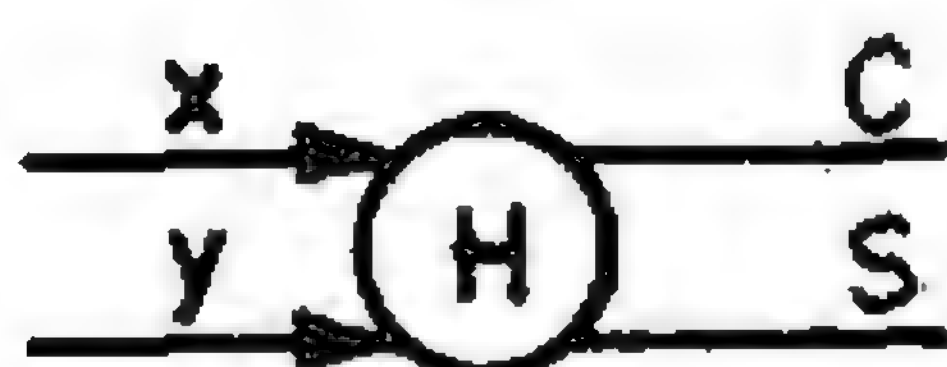
با توجه به قوانین جبر بول می توان تعبیر دیگری از S به صورت زیر به دست آورد .

$$\begin{aligned} S &= x'y + xy' \\ &= (x + y)(x' + y') \\ &= (x + y)(xy)' \end{aligned}$$

مدار S در اینجا به ۴ مدار منطقی نیاز دارد که رقم C یعنی xy نیز شامل است . این مدار در زیر رسم شده است :



این مدار را برای سهولت به صورت



نشان داده آن را مدار نیمه افزاینده یا طرح نیمه افزاینده می خوانند. مدار نیمه افزاینده برای جمع دو رقم به کار می رود . جمع دو عدد به طور کامل به وسیله ترکیبهای این مدار میسر است.

در کامپیوتر میلیونها مدار از نوع مدارهای فوق الذکر و مدارهای دیگر وجود دارد که در اینجا فقط بمنظور آشنایی با طرز کار کامپیوتر مختصری از آنها ذکر شده است .

تمرین

۱ - هریک از اعداد ۲۴۰، ۱۲۰، ۶۴ را که در مبنای اعشاری نوشته شده اند در مبنای ۲ بنویسید.

۲ - اعداد ۱۱۱۰۰۱، ۱۱۰۰۱۰۰، ۱۱۱۱۱۱ را در مبنای اعشاری بنویسید .

۳ - جمع های زیر را انجام دهید (در مبنای ۲)

$$100110 +$$

$$10110$$

$$101001 +$$

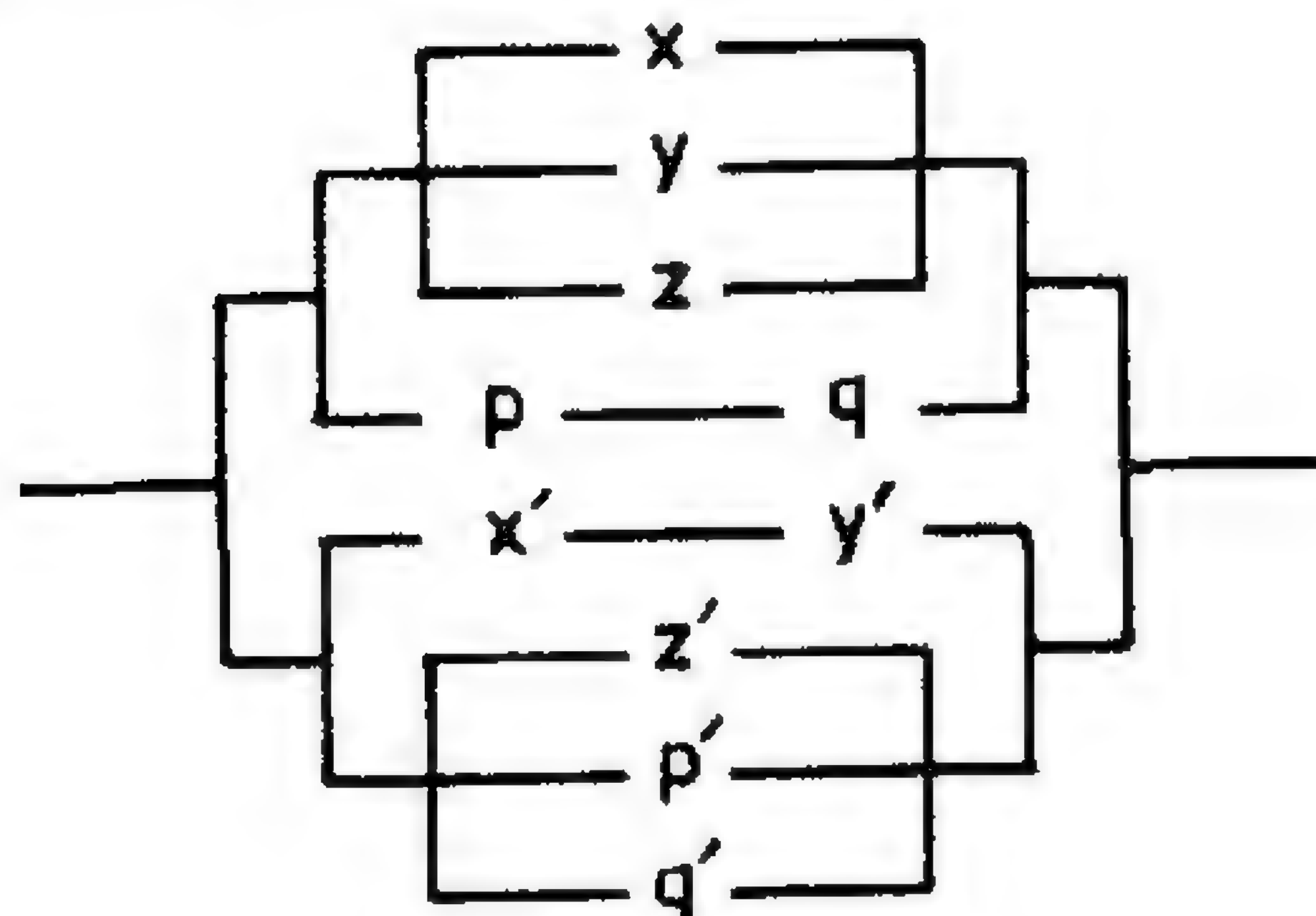
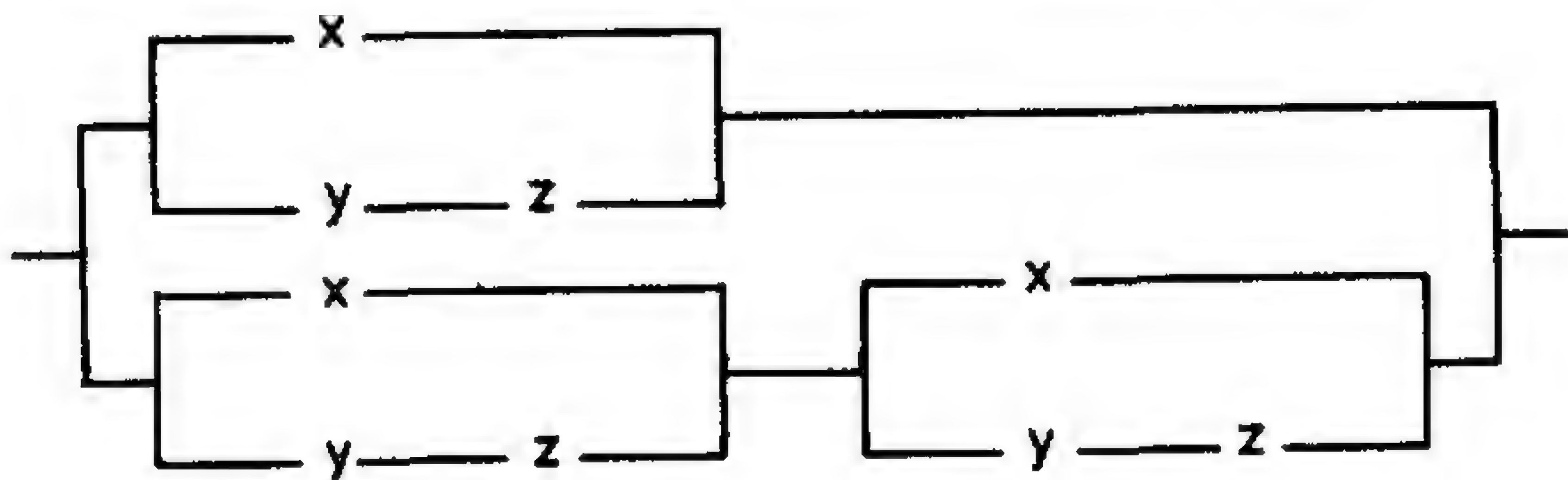
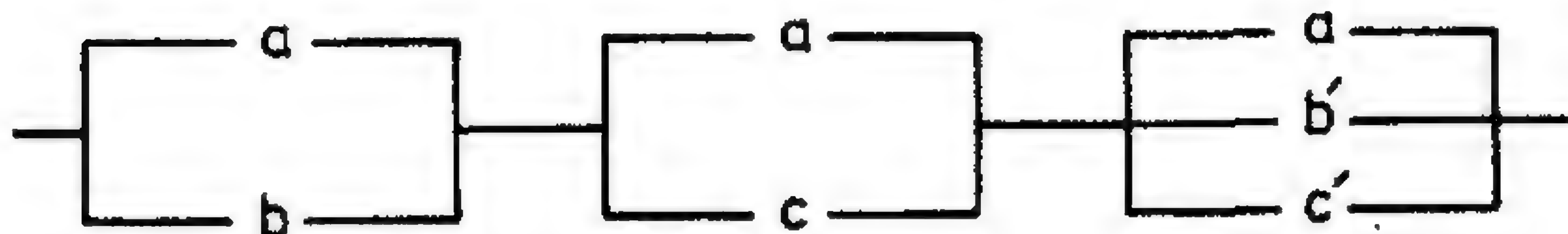
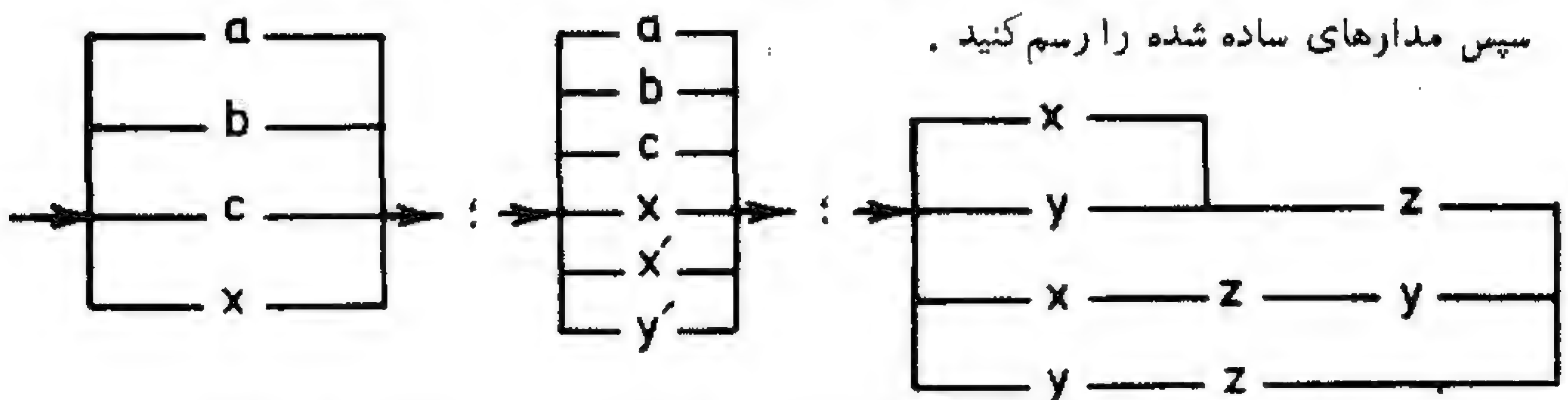
$$10101$$

$$10101/0101 +$$

$$10100/001$$

۴ - عبارات بولی مدارهای زیر را نوشته و در صورت امکان آنها را حتی المقدور ساده نمایید.

سپس مدارهای ساده شده را رسم کنید .



۵- با استفاده از عضوهای منطقی هریک از مدارهای زیر را که با جدول ارزش درستی خود مشخص شده اند رسم کنید .

x	y	A
۱	۱	۱
۱	۰	۱
۰	۱	۰
۰	۰	۰

x	y	z	B
۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۰
۰	۰	۰	۰

x	y	z	T
۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۰
۱	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۰
۰	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۰
۰	۰	۰	۰

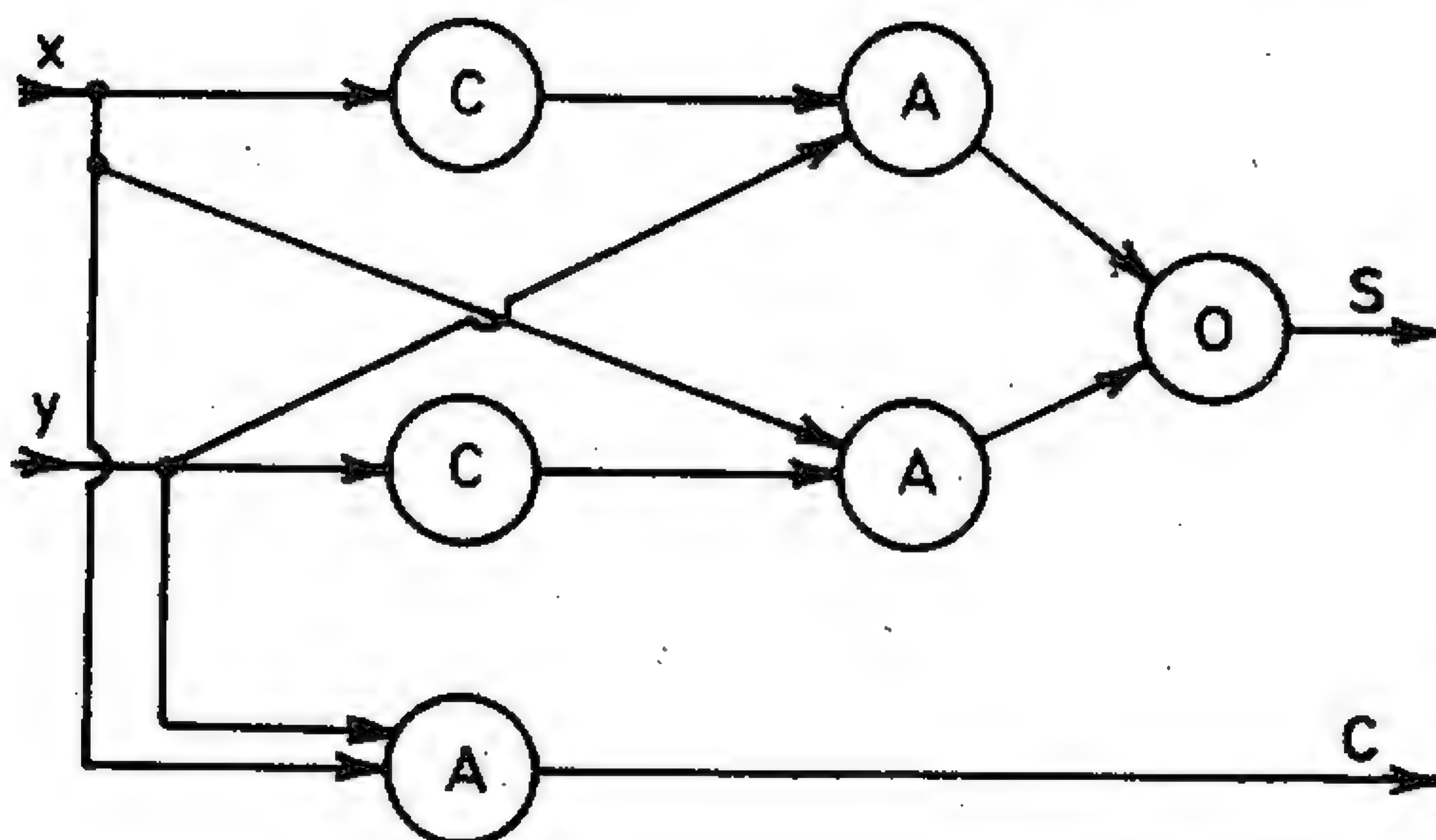
۶- با استفاده از عضوهای منطقی جدول و مدار عبارت $A = y(x + z) + x'y'z'$ را رسم کنید.

۷- جدول عبارت بولی زیر را تشکیل دهید: $T = xy'z' + x'yz' + x'y'z + x'y'z'$

۸- مداری از سه کلید a، b و c و یک چراغ تشکیل شده است. لامپ وقتی روشن خواهد شد که حداقل دو کلید از سه کلید مزبور بسته باشد. نشان دهید که عبارت بولی مدار مزبور را می توان به صورت $A = ab + c(ab' + a'b)$ نوشت .

۹- کریدوری به وسیله یک رشته لامپ رنگی تزیین شده است . مداری طرح نمایید که لامپها به وسیله هریک از سه کلیدی که به ترتیب در طرفین و وسط کریدور قرار می دهیم کنترل شوند (خاموش و روشن شوند).

۱۰- عبارت بولی S و C را برای مدار زیر بنویسید.



کامپیوتر

مقدمه - کامپیوتر دستگاهی است الکترونیکی که کارهای معینی در صورتی که نحوه

اجرای آنها را در اختیارش قرار دهند با سرعت فوق العاده زیاد انجام می دهد. بنابراین برعکس آنچه مردم عادی می پندارند و برخلاف آنچه در فیلمهای خیالی دیده می شود کامپیوتر دستگاهی شبیه مغز انسان نمی باشد. یعنی کامپیوتر به تنهایی قادر به اندیشیدن یا انجام کاری نیست بلکه برای انجام يك کار مثلا حل يك مسئله باید معلومات و مراحل حل مسئله، گام به گام به آن داده شود تا کامپیوتر با استفاده از این داده ها جواب را تعیین و به اطلاع برساند.

معلومات را داده ها و مراحل تنظیم شده حل مسئله را برنامه و جواب خارج شده را نتیجه می نامند. طرز کار کامپیوتر درست شبیه اعمالی است که يك فرد جهت تعیین جواب يك مسئله انجام می دهد. یعنی شما هم وقتی می خواهید جواب مسئله ای را پیدا کنید باید اول معلومات را مشخص نموده سپس راه حل کلی مسئله را یافته و عملیات لازم را تنظیم و دنبال نموده تا جواب به دست آورید.

همان طور که در جبر کلیدی دیدید، کامپیوتر در محاسبه از روشهای کاملا منطقی استفاده می نماید. در حقیقت مدارها بر طبق قانون جبر بول تنظیم می شوند. اما دلیل این که کامپیوتر تا این اندازه در زندگی روزمره وارد شده عبارت است از:

۱- سرعت - سرعت کار کامپیوتر در انجام عملیات فوق العاده زیاد است. يك کامپیوتر در هر ثانیه تعداد بی شماری اعمال حسابی را انجام می دهد. گاهی اوقات سرعت در انجام محاسبات از ضروریات کار است. مثلا، در پروازهای فضایی لازم است در لحظاتی بسیار کوتاه جهت اتخاذ تصمیم معینی مانند تعیین جهت حرکت مقدار زیادی محاسبات پیچیده انجام شود. مثال دیگر، بررسی نتایج حاصل از سرشماریهای عمومی در سطح کشور می باشد. بررسی و تعیین نتیجه حاصل از اعداد به دست آمده از سرشماری در يك زمان کوتاه بدون استفاده از کامپیوتر کاری است بسیار مشکل.

۲- درستی - نتیجه - کامپیوتر برخلاف انسان که ممکن است در محاسبات دچار اشتباه شود در صورتی که داده ها و دستورات درست به او داده شوند محاسبات را بدون اشتباه انجام می دهد.

۳- خستگی ناپذیری - انسان پس از مدتی کار متوالی و پشت سر هم به خصوص وقتی که کار جنبه تکراری داشته باشد خسته می شود و حال آن که کامپیوتر می تواند ساعتها، روزها و هفته ها به طور متوالی بدون احساس خستگی کار نماید.

۴- خودکار بودن - در موقع انجام عملیات حسابی با ماشینهای حساب معمولی،

دستی یا برقی ، شخص عامل باید دائماً دگمه‌ها را فشار دهد و با ماشین مشغول کار باشد در حالی که کامپیوتر به علت داشتن حافظه این عیب را ندارد و پس از آن که داده‌ها و دستورات در اختیار کامپیوتر قرار گرفت ، شخص عامل حتی می‌تواند کامپیوتر را ترك کند و کامپیوتر پس از انجام کار خواسته شده نتیجه را به خارج می‌فرستد .

اجزای تشکیل دهنده يك کامپیوتر

کامپیوتر معمولی از ۵ واحد مهم به نامهای واحد ورودی ، واحد خروجی ، واحد حافظه ، واحد کنترل یا فرمان و واحد محاسبه تشکیل شده است .

واحد ورودی - دستگاهی است که به وسیله آن داده‌ها و مراحل تنظیم شده عمل (برنامه) در اختیار کامپیوتر قرار می‌گیرد . معمولترین واحد ورودی دستگاهی موسوم به ماشین کارت‌خوان است . این ماشین اطلاعات را از کارت به حافظه منتقل می‌نماید .

واحد حافظه - دستگاهی است که برنامه را از واحد ورودی دریافت و به طور موقت یا دائم نگهداری می‌کند . علاوه بر داده‌ها و دستورات ، حافظه می‌تواند تمام مقادیری را که در حین انجام عملیات به دست می‌آورد نگهداری نماید .

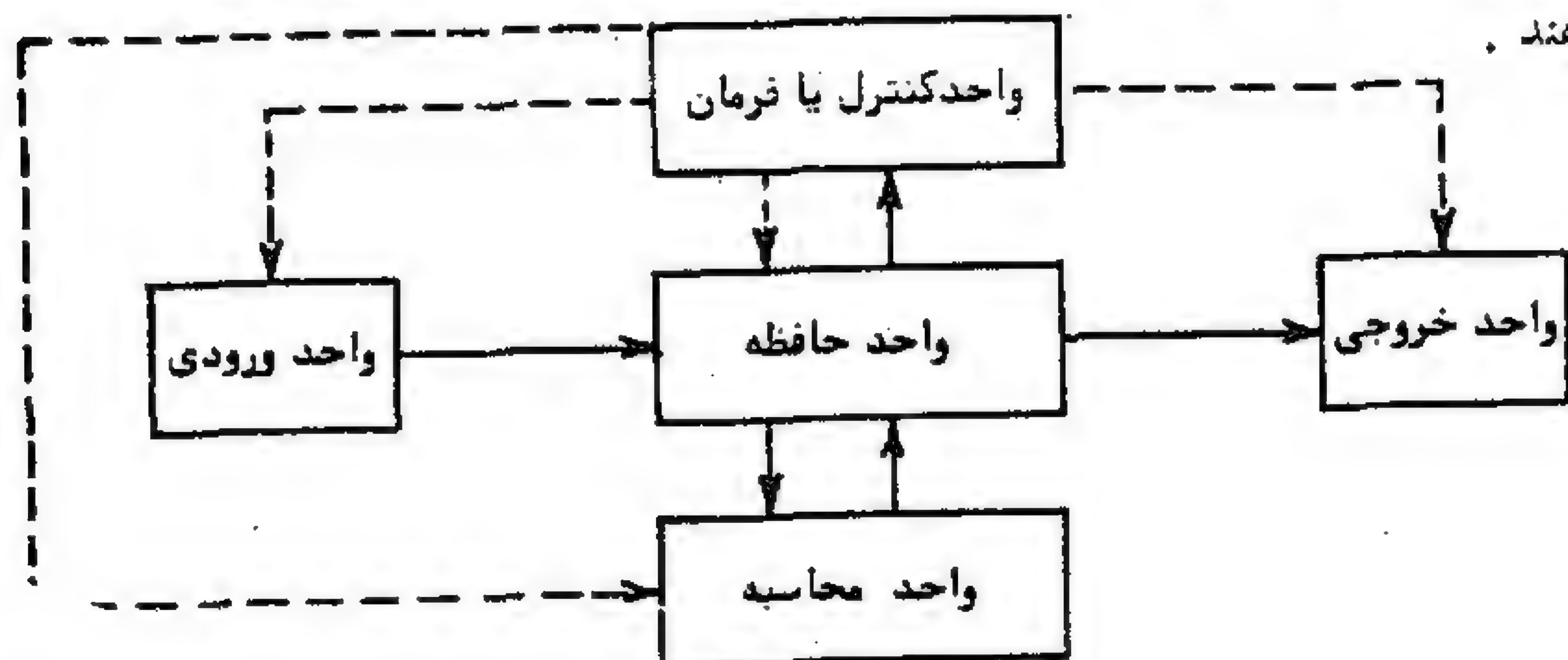
واحد محاسبه - اعمال حسابی مانند جمع ، تفریق ، ضرب و تقسیم و عمل مقایسه توسط واحد محاسبه کامپیوتر انجام می‌گیرد .

واحد فرمان - واحد فرمان قسمت اساسی کامپیوتر است و وظیفه آن نظارت بر حسن کار و انجام وظیفه واحدهای دیگر و ایجاد هماهنگی آنهاست .

واحد خروجی - دستگاهی است که نتایج ثبت شده در حافظه را به صورتی به خارج منتقل می‌نماید .

معمولترین واحد خروجی دستگاهی است موسوم به دستگاه چاپ . این دستگاه اطلاعات ثبت شده در حافظه را روی صفحات کاغذ مخصوص چاپ می‌کند .

در زیر واحدهای مختلف يك کامپیوتر و چگونگی ارتباط آنها با یکدیگر نشان داده شده است . پیکانهای پیوسته مسیر نقل و انتقال اطلاعات و پیکانهای نقطه‌چین اجرای دستورات را نشان می‌دهند .



برنامه‌های کامپیوتر

برای بهره‌گیری از کامپیوتر مسائل به صورت برنامه تنظیم می‌گردد .
 برنامه عبارت است از فرامینی که انتقال راه حل کلی مسئله را به کامپیوتر نشان می‌دهد
 تا کامپیوتر بر اساس آن داده‌ها و دستورات بتواند محاسبات را انجام دهد .
 برنامه کامپیوتر با استفاده از زبانهای خاصی که برای کامپیوتر ابداع شده توسط
 شخصی به نام برنامه نویسی تنظیم می‌گردد .

ساختمان حافظه کامپیوتر - همان طور که قبلا اشاره شد حافظه قسمتی از کامپیوتر است
 که اطلاعات در آن قرار می‌گیرد تا به هنگام نیاز از آنها استفاده شود . حافظه خود از اجزایی
 که هر يك به نام خانه حافظه خوانده می‌شود تشکیل شده است . هر خانه حافظه دارای آدرس
 مشخصی است که توسط آن آدرس می‌توان به اطلاعات ذخیره شده دست یافت . در هر خانه
 حافظه يك عدد یا يك حرف قابل ثبت است .

۱	۲	۳	۴	۵	۶
۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
...

حافظه دارای دو خاصیت اساسی است :

۱ - با دادن اطلاعات جدید به حافظه اطلاعات ثبت شده قبلی از بین می‌رود و اطلاعات
 جدید جانشین آنها می‌گردد .

۲ - اطلاعات ثبت شده در حافظه را به هر تعداد بار که بخواهیم می‌توان از حافظه خواند
 بدون آن که تغییری در محتوای آن پیدا شود .

دو خاصیت فوق را می‌توان در هر رسانه مغناطیسی یافت (نوار ضبط صوت) چون حافظه‌ها
 نیز اکثراً از این جنس هستند دارای این خواص می‌باشند .

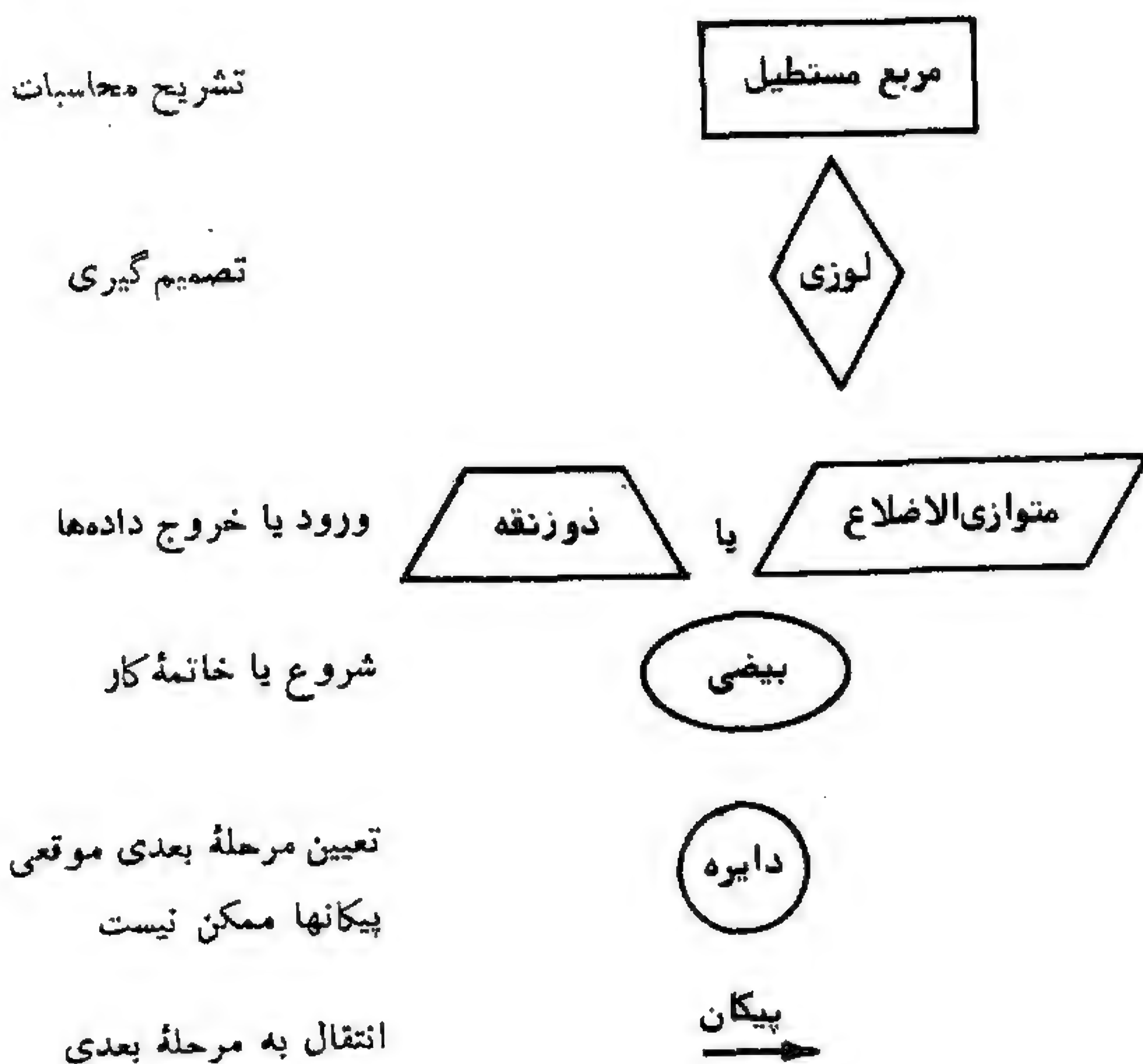
هر کامپیوتر معمولاً دارای يك یا چند نوع حافظه فرعی نیز می‌باشد .

اصول کار با کامپیوتر - کامپیوتر محاسبات خود را با ایجاد تغییرات در يك دستگاه الکترونیکی
 پیچیده به صورت ضربه‌های الکتریکی و با استفاده از جبر کلیدی در مبنای ۲ انجام می‌دهد و چون این
 محاسبات به زبان معمولی نیست بنابراین در کار با کامپیوتر باید به ترتیب زیر عمل کرد:

- ۱ - محاسباتی که باید انجام شود قبلاً آماده شوند .
 - ۲ - این محاسبات به مرحله‌های ساده‌ای تقسیم گردند (برای این کار از رهنما یا فلوچارت استفاده می‌شود) .
 - ۳ - برنامه‌نویس رهنمای تهیه شده را به یکی از زبانهای خاص برنامه‌نویسی ترجمه می‌نماید .
 - ۴ - برنامه ترجمه شده به وسیله دستگاه منگنه زن روی کارتهای مخصوص منگنه می‌شود .
 - ۵ - کارتهای منگنه شده برنامه به ضمیمه دسته کارتهای داده‌ها (در صورت لزوم) برای اجرا به ماشین داده می‌شود و نتیجه بر روی کاغذهای مخصوص یا واحد خروجی از قبیل صفحه تلویزیون یا نوار مغناطیسی منتقل می‌شود .
- کارت منگنه** - کارت منگنه کارت متوایی است . معمولترین نوع این کارت به شکل مربع مستطیل بوده و دارای ۸۰ ستون و ۱۲ سطر می‌باشد .
- رهنما (فلوچارت)** - از آنجا که رهنما نقش اساسی در تهیه یک برنامه داشته و مستقل از زبان برنامه نویسی است ما به تشریح بیشتر آن می‌پردازیم .

رهنما عبارت است از نمودار منطقی یک مسئله با استفاده از اشکال هندسی اشکال هندسی معمولاً با قراردادهای زیر مورد استفاده قرار می‌گیرند .

شکل مورد استفاده

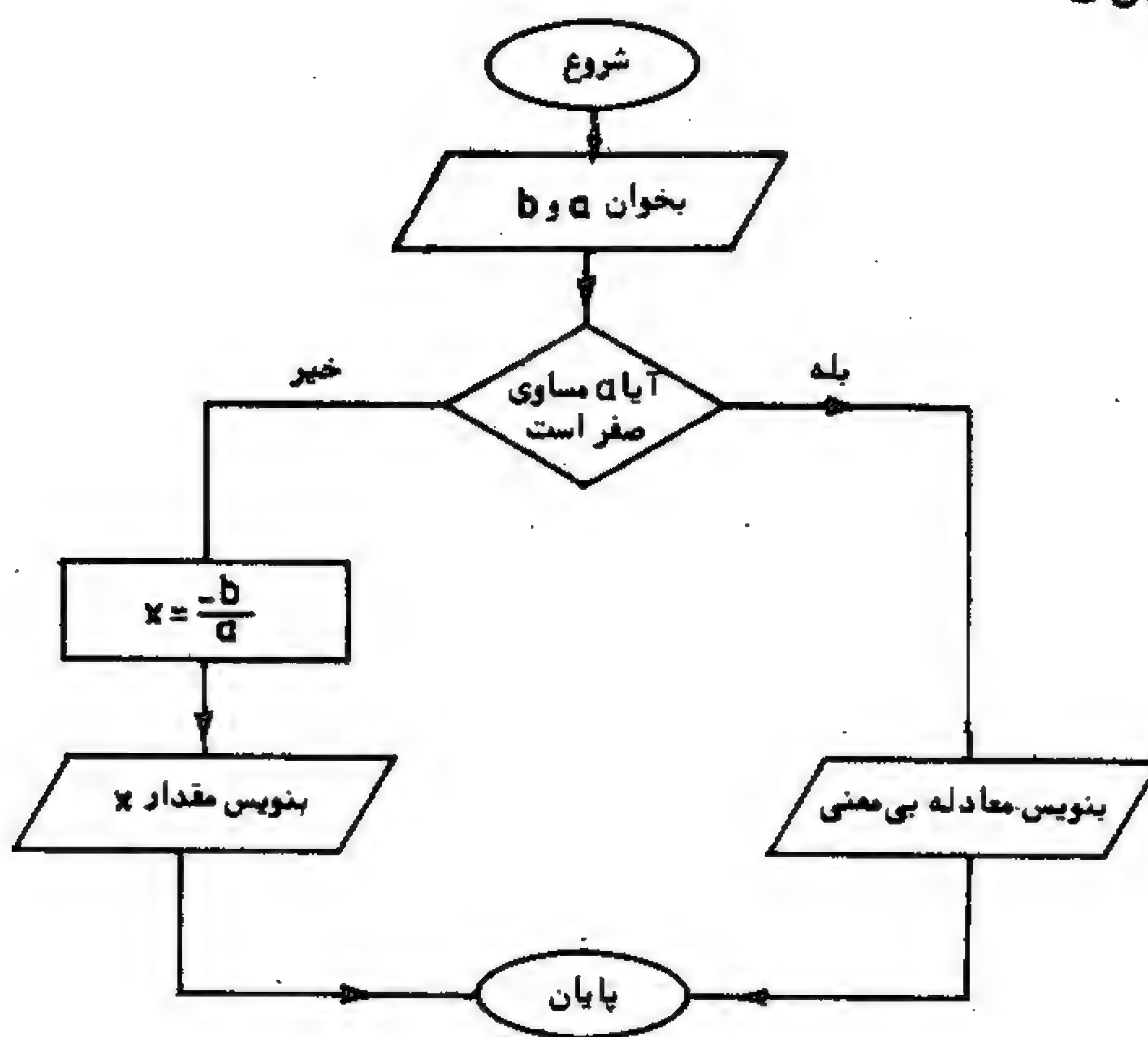


چند مثال

- ۱ - می خواهیم ره نما (فلو چارت) حل يك معادله يك مجهولی درجه اول را در R رسم نماییم.
- حل - معادله را به صورت $ax + b = 0$ در نظر گرفته برای حل آن کافی است دو مقدار a و b را بشناسیم. با توجه به این مقادیر در حالات مختلف، جواب معادله را به دست می آوریم.
- مراحل عمل به صورت زیر انجام می گیرد :

۱ - شروع ؛ ۲ - خواندن

- ۳ - $a = 0$ ، آن گاه بنویس معادله بی معنی - برو به پایان .
- اگر $a \neq 0$ ، آن گاه $x = -\frac{b}{a}$ محاسبه بنویس مقدار x .
- ۴ - پایان -



- ۲ - می خواهیم ره نما (فلو چارت) حل يك دستگاه دو معادله دو مجهولی را در R با استفاده از دستور کرامر رسم کنیم .

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

حل - دستگاه معادله را به صورت

اختیار می نمایم و می دانیم جهت حل این دستگاه نیاز به مقادیر $\begin{cases} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{cases}$ می باشد .

حال اگر دترمینال ضرایب را Δ بنامیم خواهیم داشت :

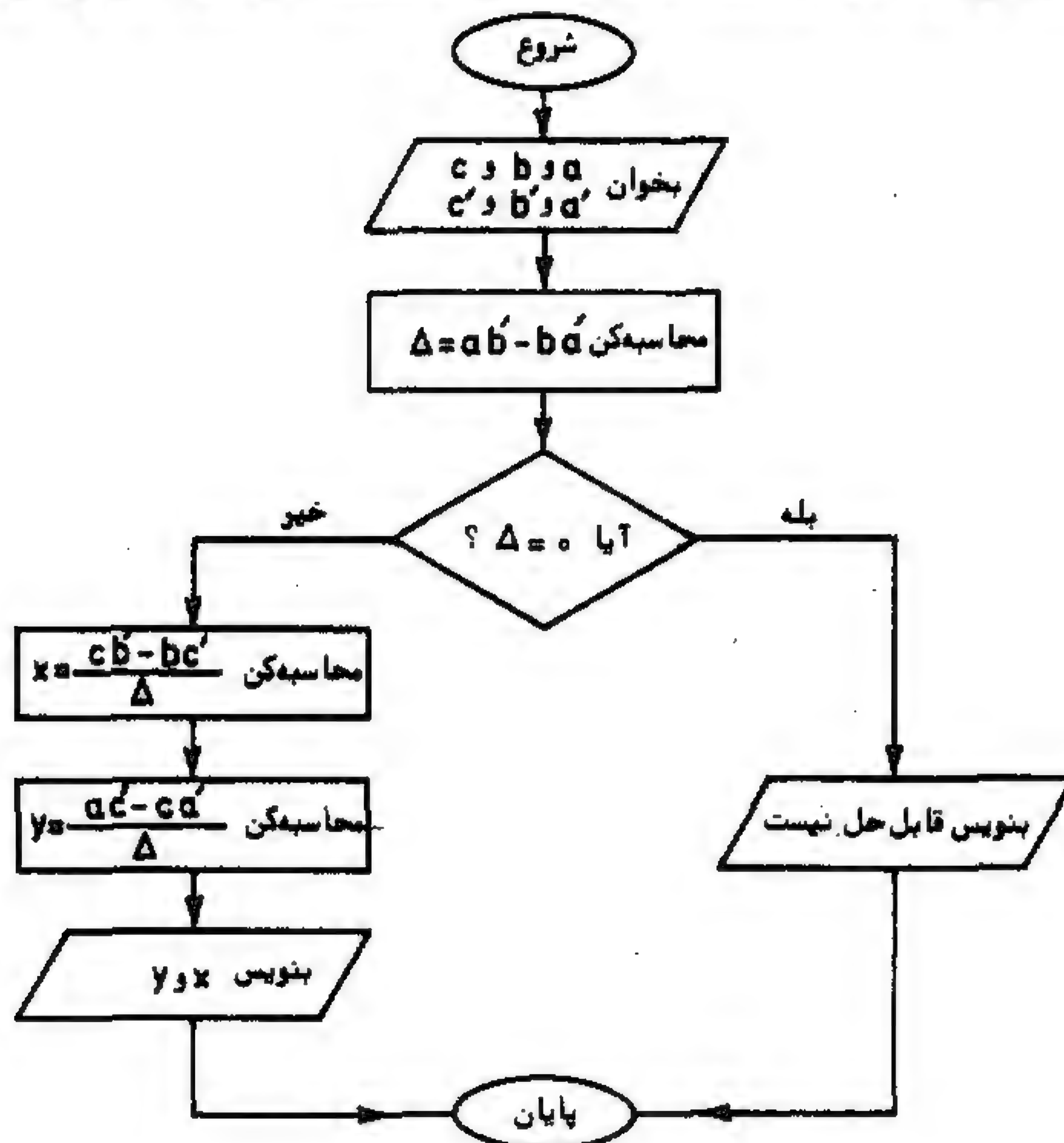
$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$$

در صورتی که $\Delta \neq 0$ در این صورت دستگاه دارای دو جواب زیر است :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{cb' - bc'}{\Delta}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{ac' - ca'}{\Delta}$$

و در صورتی که $\Delta = 0$ دستگاه دارای جواب نیست . رهنمای مربوط چنین است



مثال ۳ - می‌خواهیم رهنمای حل يك معادله يك مجهولی درجه دوم را در R بنویسیم .

حل - معادله را به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ در نظر می‌گیریم . برای تعیین ریشه‌های

این معادله باید مراحل زیر انجام شود:

۱- شروع .

۲- مشخص داشتن مقادیر a ، b و c .

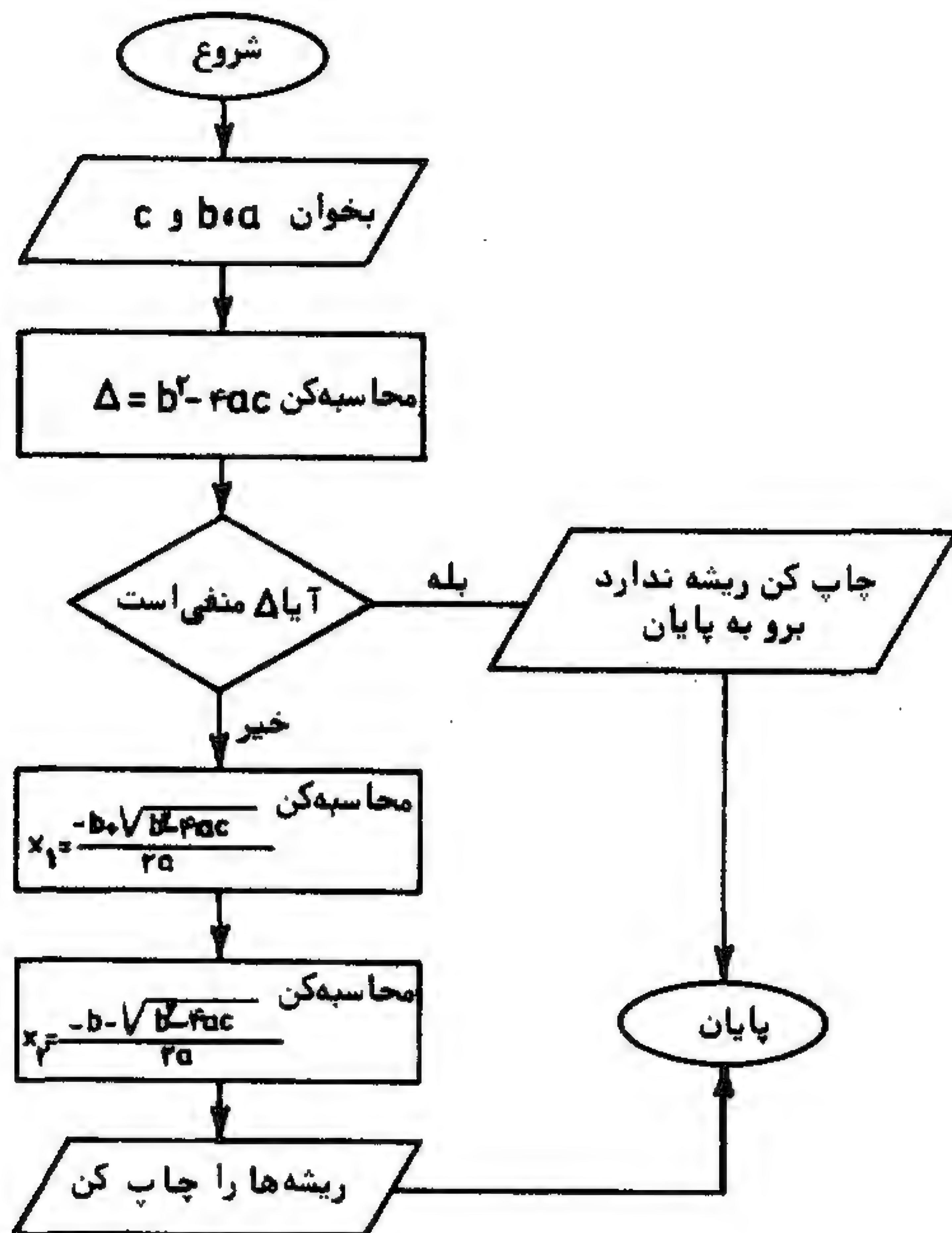
۳- محاسبه $\Delta = b^2 - 4ac$.

۴- تعیین علامت Δ ، اگر Δ صفر یا بزرگتر از صفر باشد يك یا دوریشه حقیقی محاسبه

شوند و به دستور شماره ۵ مراجعه شود.

۵- چاپ ریشه های محاسبه شده .

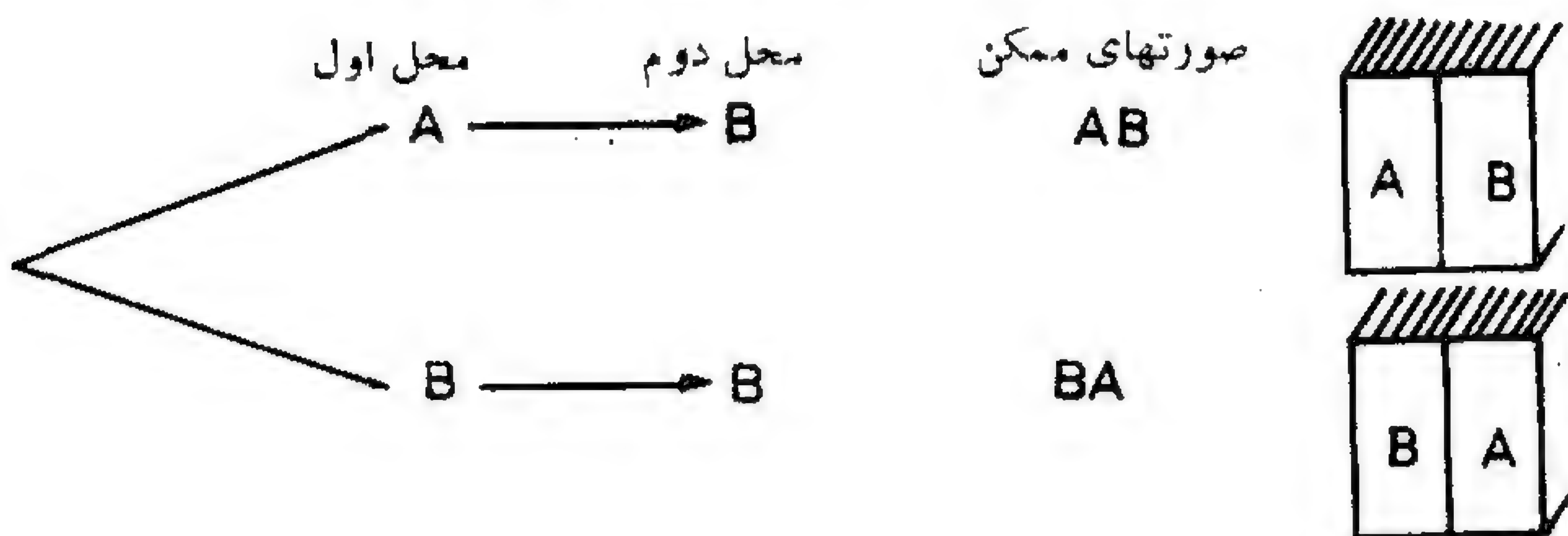
در ۵ مرحله کار موردنظر خاتمه یافته است. رهنمای این مسئله عبارت است از:



آنالیز ترکیبی

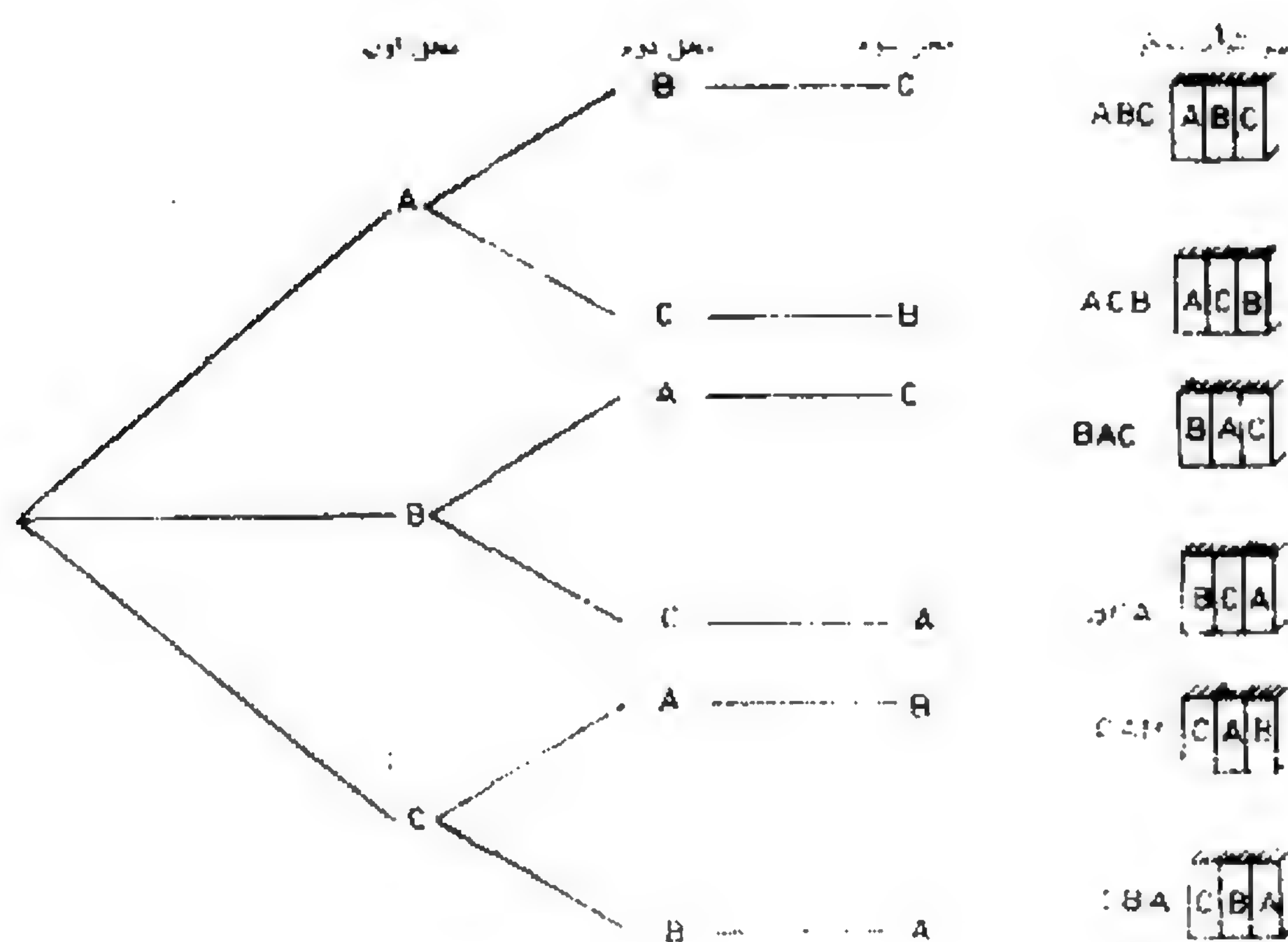
تبدیل (جایگشت)

مثال ۱ - می خواهیم دو کتاب را که با حروف A و B مشخص شده اند در یک قفسه کنار هم بچینیم ؛ صورتهای ممکن را برای انجام این کار بنویسید .
دو کتاب به صورتهای زیر می توانند در یک قفسه کنار هم قرار گیرند :



هر کدام از صورتهای AB و BA به نام یک تبدیل دو حرف A و B خوانده می شود .

مثال ۲ - می خواهیم سه کتاب را که با حروف A ، B و C مشخص شده اند ، در یک قفسه کنار هم بچینیم ؛ صورتهای ممکن را برای انجام این کار بنویسید . برای تعیین صورتهای ممکن از نمودار درختی استفاده می کنیم .



در اینجا دیده می‌شود که کتابهای A ، B و C را به صورتهای زیر می‌توان در يك قفسه کنار هم جا داد :

ABC ؛ ACB ؛ BAC ؛ BCA ؛ CAB ؛ CBA

هر کدام از صورتهای فوق يك تبدیل سه حرف A و B و C نامیده می‌شود .

مثال ۳ - تمام اعداد چهار رقمی را که با ارقام ۱ ، ۲ ، ۳ و ۴ می‌توان نوشت بنویسید (تکرار ارقام در يك عدد مجاز نیست) . هرگاه از نمودار درختی برای این منظور استفاده کنیم ، اعداد زیر به دست می‌آید که تعداد آنها برابر ۲۴ است :

۱	۲	۳	۴	۲	۳	۱	۴	۳	۱	۲	۴	۴	۱	۲	۳
۱	۲	۴	۳	۲	۳	۴	۱	۳	۱	۴	۲	۴	۱	۳	۲
۱	۳	۲	۴	۲	۴	۱	۳	۳	۲	۱	۴	۴	۲	۱	۳
۱	۳	۴	۲	۲	۴	۳	۱	۳	۲	۴	۱	۴	۲	۳	۱
۱	۴	۳	۲	۲	۱	۳	۴	۳	۴	۲	۱	۴	۳	۱	۲
۱	۴	۲	۳	۲	۱	۴	۳	۳	۴	۱	۲	۴	۳	۲	۱

هر کدام از صورتهای فوق به نام يك تبدیل چهار رقم خوانده می‌شود .

تعریف - يك تبدیل از يك مجموعه اشیا عبارت از يك حالت از قرار دادن عضوهای آن مجموعه کنار هم می‌باشد .

محاسبه تعداد تبدیلهای مثالهای فوق - دیدید که تعداد تبدیلهای دوشی A و B برابر ۲ و تعداد تبدیلهای سه شیء A ، B و C برابر ۶ و تعداد تبدیلهای چهار شیء برابر ۲۴ است . يك راه برای تعیین تعداد تبدیلهای این است که با کمک نمودار درختی و یا وسیله دیگر ، تمام تبدیلهای را نوشته سپس آنها را بشمریم . البته این کار وقتی تعداد اشیا زیاد باشد ، مشکل خواهد بود . ببینیم چگونه می‌توان بدون نوشتن تمام تبدیلهای تعداد آنها را حساب کرد ؟ برگردیم به مثال قرار دادن ۳ کتاب در يك قفسه ؛ وقتی ما می‌خواهیم سه کتاب A ، B و C را در يك قفسه کنار هم جا دهیم ، در حقیقت باید سه محل خالی را به صورتهای زیر پر کنیم :

محل اول	محل دوم	محل سوم
<div style="border: 1px solid black; width: 60px; height: 60px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;">?</div>	<div style="border: 1px solid black; width: 60px; height: 60px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;">?</div>	<div style="border: 1px solid black; width: 60px; height: 60px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;">?</div>

در محل اول هر کدام از کتابهای A ، B یا C را می‌توان جاداد . پس برای پر کردن محل اول سه راه وجود دارد :

تعداد حالت‌های محل اول	تعداد حالت‌های محل دوم	تعداد حالت‌های محل سوم
۳	?	?

بعد از این که کتاب اول در محل مربوط قرار داده شد (محل اول پر شد) ، برای محل دوم دو کتاب باقی می ماند (مثلاً اگر کتاب اول A باشد کتابهای B و C باقی خواهد ماند) . پس برای پر کردن محل دوم دو راه وجود دارد :

تعداد حالت‌های محل اول	تعداد حالت‌های محل دوم	تعداد حالت‌های محل سوم
۳	۲	?

بعد از این که کتاب دوم قرار داده شد ، یک کتاب در آخر باقی می ماند (مثلاً اگر A و B جا داده شده باشد C باقی خواهد ماند) لذا برای محل سوم یک راه وجود خواهد داشت :

تعداد حالت‌های محل اول	تعداد حالت‌های محل دوم	تعداد حالت‌های محل سوم
۳	۲	۱

تعداد تبدیلهای سه شیء از ضرب عددهای ۳ و ۲ و ۱ به دست می آید .

$$۳ \times ۲ \times ۱ = ۶ = \text{تعداد تبدیلهای سه شیء}$$

همچنین برای تعیین تمام اعداد چهاررقمی که با ۱ ، ۲ ، ۳ و ۴ بدون تکرار ارقام نوشته می شوند ، باید ۴ محل به صورت زیر پر شود :

محل اول	محل دوم	محل سوم	محل چهارم
?	?	?	?

محل اول را با هر کدام از این چهار رقم می توان پر کرد . به عبارت دیگر ، محل اول

با ۴ راه پر می شود :

تعداد حالت‌های محل اول	تعداد حالت‌های محل دوم	تعداد حالت‌های محل سوم	تعداد حالت‌های محل چهارم
۴	?	?	?

بعد از آن که محل اول بایکی از راههای گفته شده پر شد سه رقم باقی می ماند (اگر ۳ برداشته شده باشد ۱ ، ۲ و ۴ می ماند) در نتیجه محل دوم با هر کدام از این سه رقم ممکن است پر شود . به عبارت دیگر محل دوم با ۳ راه پر می شود :

تعداد حالت های محل اول	تعداد حالت های محل دوم	تعداد حالت های محل سوم	تعداد حالت های محل چهارم
۴	۳	?	?

بعد از این که محل دوم پر شد دو رقم باقی می ماند (مثلاً اگر يك برداشته شده باشد ، ۲ و ۴ باقی می ماند) در نتیجه محل سوم با هر کدام از این دو رقم می تواند پر شود . به عبارت دیگر برای اشغال محل سوم دو راه وجود دارد :

تعداد حالت های محل اول	تعداد حالت های محل دوم	تعداد حالت های محل سوم	تعداد حالت های محل چهارم
۴	۳	۲	?

پس از پر شدن محل سوم تنها يك رقم باقی می ماند. در نتیجه برای پر کردن محل چهارم فقط يك راه وجود خواهد داشت :

تعداد حالت های محل اول	تعداد حالت های محل دوم	تعداد حالت های محل سوم	تعداد حالت های محل چهارم
۴	۳	۲	۱

تعداد تبدیلهای چهار رقم از ضرب عددهای ۱ و ۲ و ۳ و ۴ در هم به دست می آید :

$$۲۴ = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = \text{تعداد ۴ شیء}$$

با توجه به توضیحات فوق آیا می توانید تعداد تبدیلهای ۵ شیء را حدس بزنید ؟ آیا تعداد تبدیلهای ۶ شیء برابر است با :

$$۷۲۰ = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = \text{تعداد تبدیلهای ۶ شیء}$$

آیا می توانید حدس بزنید که تعداد تبدیلهای n شیء وقتی در هر مرتبه همه آنها به کار برده شود به چه صورت خواهد بود ؟

برای توضیح عمل ضرب در محاسبات فوق اصل زیر را بیان می کنیم :

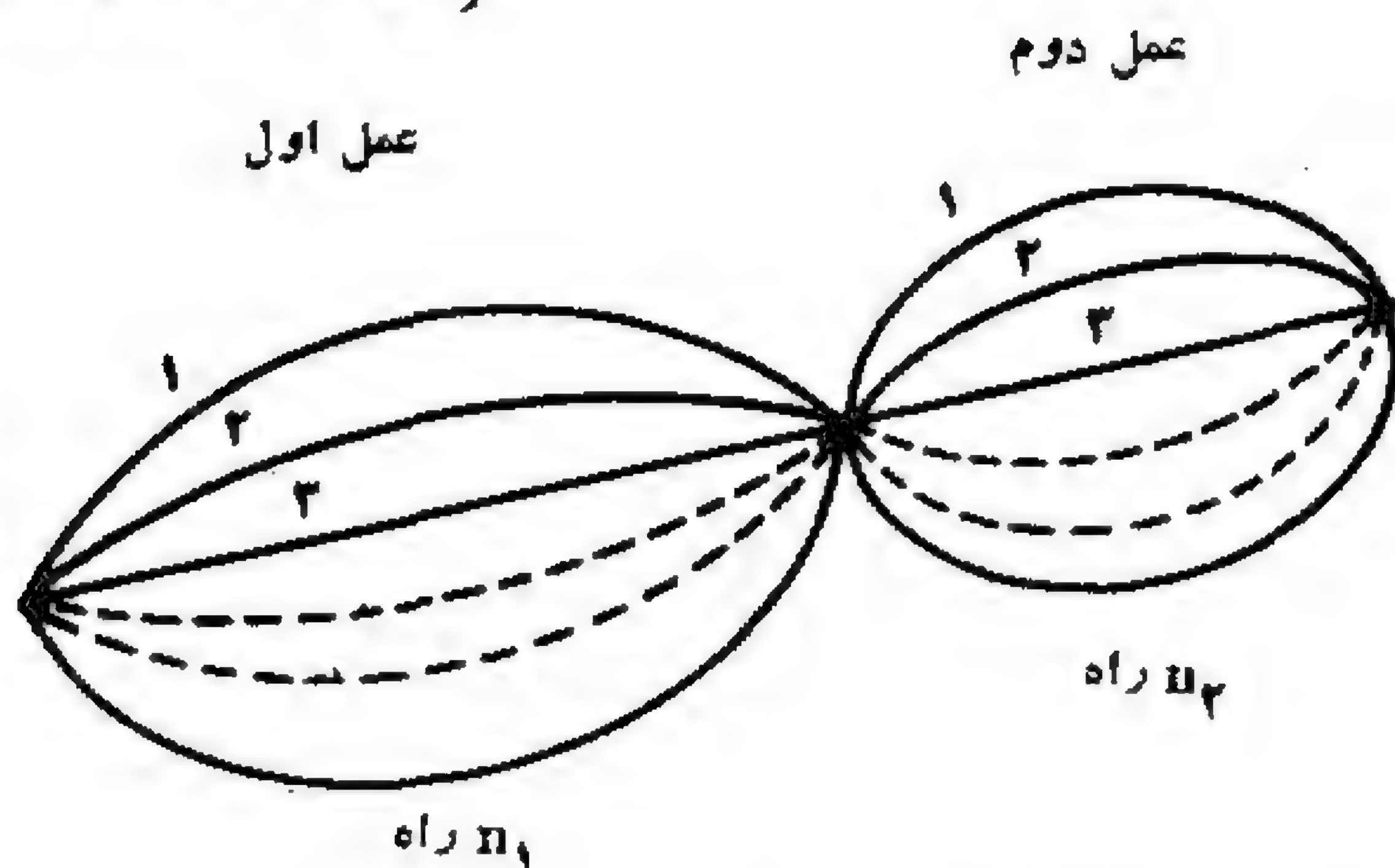
اصل شمارش - هرگاه يك عمل معین بتواند با n_1 راه مختلف انجام شود و برای هريك از این راهها عمل دیگری بتواند با n_2 راه انجام گردد . در این صورت دو عمل با هم می توانند با

$n_1 \times n_2$ راه مختلف انجام شوند.

هرگاه n_1 راه اول را با مجموعه A و n_2 راه دوم را با مجموعه B نشان دهیم ، خواهیم داشت :

$$A = \{ 1, 2, 3, \dots, n_1 \}$$

$$B = \{ 1, 2, 3, \dots, n_2 \}$$



در حقیقت راههایی که دو عمل باهم می توانند انجام شوند برابر با تعداد عضوهای حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه A و B خواهد بود :

$$A \times B = \text{تعداد عضوهای } A \times B = n(A \times B) = n(\{ (a, b) \mid a \in A \text{ و } b \in B \})$$

اصل شمارش برای سه عمل نیز درست است . یعنی : هرگاه يك عمل بتواند به n_1 راه مختلف انجام شود و بعد از این که عمل اول بایکی از این راهها انجام شد ، برای هريك از این راهها عمل دوم بتواند با n_2 راه مختلف انجام گیرد و پس از انجام عمل دوم ، برای هريك از آنها عمل سوم بتواند با n_3 راه مختلف انجام شود ، این سه عمل باهم می توانند با $n_1 \times n_2 \times n_3$ راه مختلف انجام گردند .

اصل شمارش برای k , $(k \in \mathbb{N})$ عمل نیز درست است .

مثال ۱ - يك شرکت اتوبوسرانی هر روز ۵ دستگاه اتوبوس از شیراز به تهران و ۳ دستگاه اتوبوس از تهران به مشهد می فرستد ، اگر شخصی بخواهد با اتوبوسهای این شرکت از شیراز به مشهد مسافرت کند ، برنامه مسافرت او به چند طریق ممکن است تنظیم شود .

حل : طبق اصل شمارش تعداد برنامه های مسافرت این شخص برابر است با : $5 \times 3 = 15$.

مثال ۲ - اداره راهنمایی رانندگی يك شهرستان برای شماره گذاری ماشینهای آن شهر از این طرح استفاده می کند که شماره هر ماشین شامل يك حرف الفبا و يك عدد سه رقمی است . مانند « ۲۵۳ - ب » تعیین کنید با این طرح چند ماشین را می توان شماره گذاری کرد (تکرار رقمها مجاز است) .

حل : طبق آنچه گفته شد ، در اینجا ما ۴ محل به صورت صفحه بعد داریم که باید پر شود :

محل اول	محل دوم	محل سوم	محل چهارم
?	?	?	?

محل اول می‌تواند با هر يك از حروف الفبای فارسی پر شود و چون ما ۳۲ حرف الفبا داریم لذا محل اول با ۳۲ طریق ممکن است پر شود .

تعداد حالت‌های محل اول	تعداد حالت‌های محل دوم	تعداد حالت‌های محل سوم	تعداد حالت‌های محل چهارم
۳۲	?	?	?

بعد از این که حرف الفبا به کار برده شد ، محل دوم باید بایکی از ارقام يك تا ۹ پر شود (چرا ؟) ؛ و چون تعداد این ارقام برابر ۹ است در نتیجه محل دوم با ۹ طریق ممکن است پر شود .

تعداد حالت‌های محل اول	تعداد حالت‌های محل دوم	تعداد حالت‌های محل سوم	تعداد حالت‌های محل چهارم
۳۲	۹	?	?

هر کدام از محل‌های سوم و چهارم باید با ارقام از صفر تا ۹ پر شوند و تکرار ارقام مجاز است ؛ لذا هر کدام به ۱۰ طریق پر خواهد شد. بنابراین داریم :

تعداد حالت‌های محل اول	تعداد حالت‌های محل دوم	تعداد حالت‌های محل سوم	تعداد حالت‌های محل چهارم
۳۲	۹	۱۰	۱۰

در نتیجه تعداد ماشین‌هایی که با طرح فوق شماره‌گذاری می‌شوند طبق اصل شمارش برابر است با :

$$32 \times 9 \times 10 \times 10 = 28800$$

مثال ۳ - ۱۲ کتاب در سه ردیف و در هر ردیف ۴ کتاب قرار داده شده است . شخصی می‌خواهد ۳ کتاب را از میان ۱۲ کتاب بدین ترتیب انتخاب کند که از هر ردیف فقط يك کتاب بردارد ؛ تعیین کنید به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد .

حل : در اینجا سه محل خالی به صورت زیر داریم که باید پر شود :

محل اول	محل دوم	محل سوم
?	?	?

برای برگردن محل اول ۱۲ کتاب موجود است که هر کدام از هسردیف ممکن است

برداشته شود :

تعداد حالت‌های محل اول	تعداد حالت‌های محل دوم	تعداد حالت‌های محل سوم
۱۲	?	?

بعد از این که محل اول پر شد ، ردیفی که کتاب اول از آن انتخاب شده حذف می گردد

در نتیجه دو ردیف یعنی ۸ کتاب برای محل دوم باقی می ماند :

تعداد حالت‌های محل اول	تعداد حالت‌های محل دوم	تعداد حالت‌های محل سوم
۱۲	۸	?

بعد از برداشتن کتاب دوم ردیفی که این کتاب در آن قرار داشته نیز حذف خواهد شد ،

در نتیجه يك ردیف یا ۴ کتاب برای محل سوم باقی می ماند :

تعداد حالت‌های محل اول	تعداد حالت‌های محل دوم	تعداد حالت‌های محل سوم
۱۲	۸	۴

بنابراین تعداد راههای ممکن برای انجام این کار طبق اصل شمارش برابر است با :

$$۱۲ \times ۸ \times ۴ = ۳۸۴$$

تمرین

- ۱- تبدیلهای مختلف چهار حرف D ، E ، F و G را بنویسید .
- ۲- تبدیلهای مختلف پنج علامت * ، O ، □ ، △ و ● را بنویسید .
- ۳- تمام اعداد سه رقمی را که با ارقام ۳ ، ۴ و ۵ ممکن است نوشته شود بنویسید (تکرار مجاز نیست) .
- ۴- رضا ۶ مداد رنگی دارد ؛ تعیین کنید به چند طریق می تواند آنها را در يك ردیف کنارهم قرار دهد .
- ۵- ۷ نفر دهنده برای انجام يك مسابقه دو صد متر وارد زمین می شوند ؛ هرگاه هیچ دهنده ای مساوی نکنند تعیین کنید به چند طریق ممکن است این ۷ نفر مسابقه را تمام کنند .
- ۶- چه تعداد زوجهای مرتب به صورت (x ، y) ممکن است نوشته شود هرگاه

$$. y \in \{ 1, 2, 3 \} \text{ و } x \in \{ a, b, c, d \}$$

- ۷- تعداد تبدیلهای رقمهای صفر تا ۹ را در نوشتن يك عدد ده رقمی به دست آورید .
- ۸- اگر در شهرستان A هر شماره اتومبیل شامل يك حرف الفبا و يك عدد شش رقمی و در شهرستان B هر شماره اتومبیل شامل يك حرف الفبا و يك عدد چهار رقمی باشد ، تعداد اتومبیلهایی که در شهرستان A ممکن است شماره گذاری شود چند برابر تعداد اتومبیلهایی است که می توان در شهرستان B شماره گذاری کرد ؟
- ۹- از شهر A به شهر B سه راه و از شهر B به شهر C ۴ راه موجود است . تعیین کنید به چند صورت يك مسافر ممکن است از شهر A و از طریق شهر B به شهر C مسافرت رفت و برگشت انجام دهد . در صورتی که راههای انتخاب شده در رفت و برگشت یکی نباشد .
- ۱۰- به چند طریق ممکن است ۷ کتاب مختلف را در يك قفسه جا داد به قسمی که :
الف - دو کتاب مخصوص پهلوی هم باشند ؛ ب - سه کتاب مخصوص پهلوی هم باشند .

فاکتوریل

دیدیم که :

$$\text{تعداد تبدیلهای ۳ شیء} = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$\text{تعداد تبدیلهای ۴ شیء} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$\text{تعداد تبدیلهای ۵ شیء} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \quad (1)$$

$$\text{تعداد تبدیلهای ۶ شیء} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

.....

.....

به همین قیاس تعداد تبدیلهای n شیء به دست می آید :

$$\text{تعداد تبدیلهای n شیء} = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

يك راه ساده برای نوشتن حاصل ضربهای فوق استفاده از تعریف زیر است :

تعریف - حاصل ضرب تمام اعداد درست مثبت از n تا ۱ را به صورت ! n نمایش داده آن را n فاکتوریل می خوانند .

$$n! = n (n-1) (n-2) (n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

بنابر قرارداد صفر فاکتوریل را مساوی يك می گیریم یعنی : $0! = 1$

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

طبق این تعریف داریم :

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

پس (۱) را می‌توان به صورت زیر نشان داد :

$$۳! = \text{تعداد تبدیلهای } ۳ \text{ شیء}$$

$$۴! = \text{تعداد تبدیلهای } ۴ \text{ شیء}$$

$$۵! = \text{تعداد تبدیلهای } ۵ \text{ شیء}$$

$$۶! = \text{تعداد تبدیلهای } ۶ \text{ شیء}$$

.....

$$n! = \text{تعداد تبدیلهای } n \text{ شیء}$$

مثال ۱ - هرگاه بدانیم که :

$$۲۰! = ۲۰ \times ۱۹!$$

$$۱۰۰! = ۱۰۰ \times ۹۹!$$

$$n! = n \times (n-1)!$$

جملات $۳۰!$ ، $۱۰۰۰!$ ، $(n+1)!$ ، $(n-1)!$ و $(n-r)!$ را به صورت فوق بنویسید.

حل :

$$۳۰! = ۳۰ \times ۲۹!$$

$$۱۰۰۰! = ۱۰۰۰ \times ۹۹۹!$$

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

$$(n-1)! = (n-1) (n-2)!$$

$$(n-r)! = (n-r) (n-r-1)!$$

مثال ۲ - هرگاه بدانیم که :

$$۳۰ \times ۲۹ \times ۲۸! = ۳۰!$$

$$n(n-1)(n-2)! = n!$$

طرف دوم تساویهای زیر را بنویسید :

$$۲۰ \times ۱۹ \times ۱۸! = ?$$

$$(n-r)(n-r-1)(n-r-2)! = ?$$

حل :

$$۲۰ \times ۱۹ \times ۱۸! = ۲۰!$$

$$(n-r)(n-r-1)(n-r-2)! = (n-r)!$$

با توجه به مطالب فوق تعداد تبدیلهای n شیء مختلف هرگاه هر مرتبه تمام n شیء

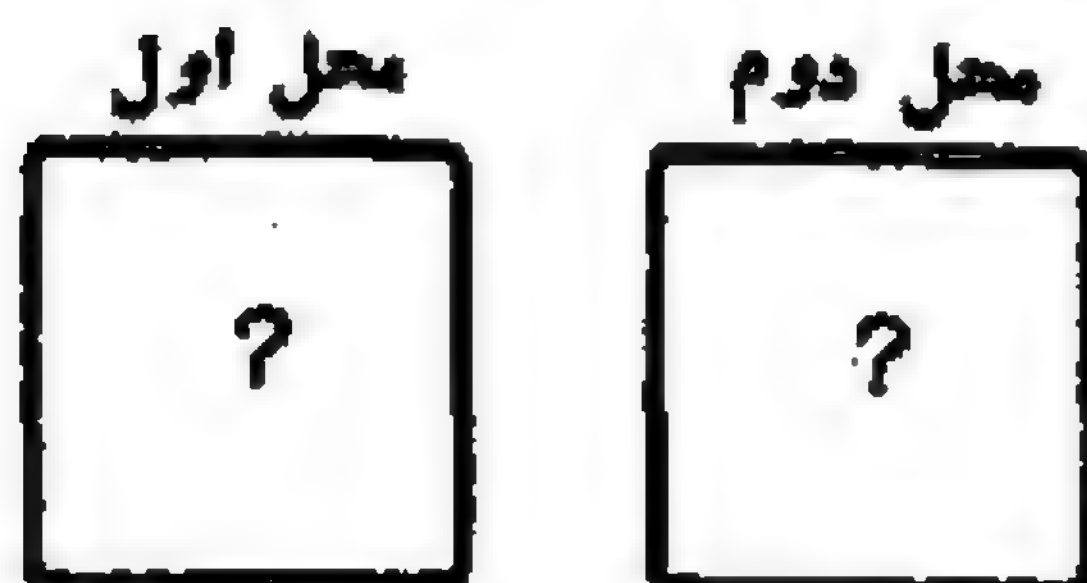
$$(n)_n = n!$$

انتخاب شود از دستور زیر به دست می‌آید .

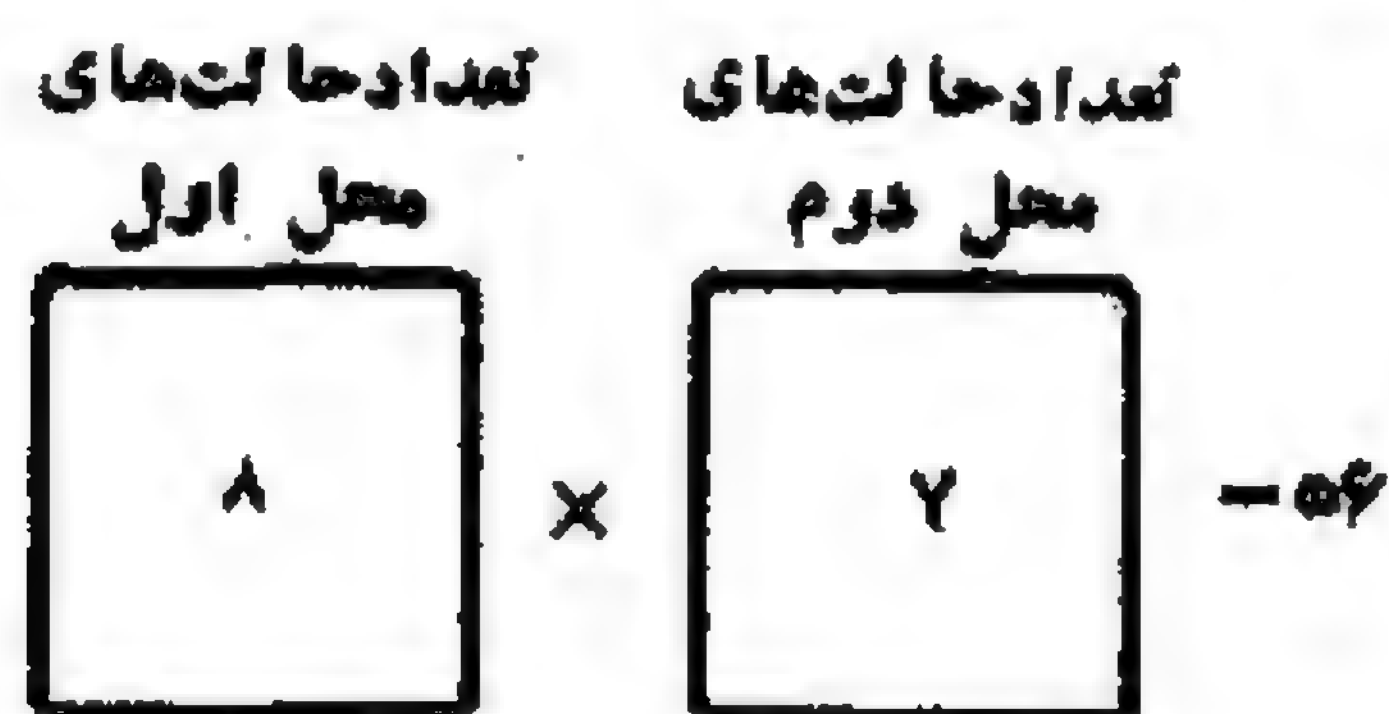
تعداد تبدیلهای r شیء از n شیء متمایز ($r < n$)

در بالا تعداد تبدیلهای n شیء را هرگاه در هر تبدیل تمام n شیء به کار برده شود دیدیم. اکنون می‌خواهیم تبدیلهای n شیء را هرگاه در هر تبدیل r شیء از آنها انتخاب شود، مورد مطالعه قرار دهیم. به مثالهای زیر توجه کنید:

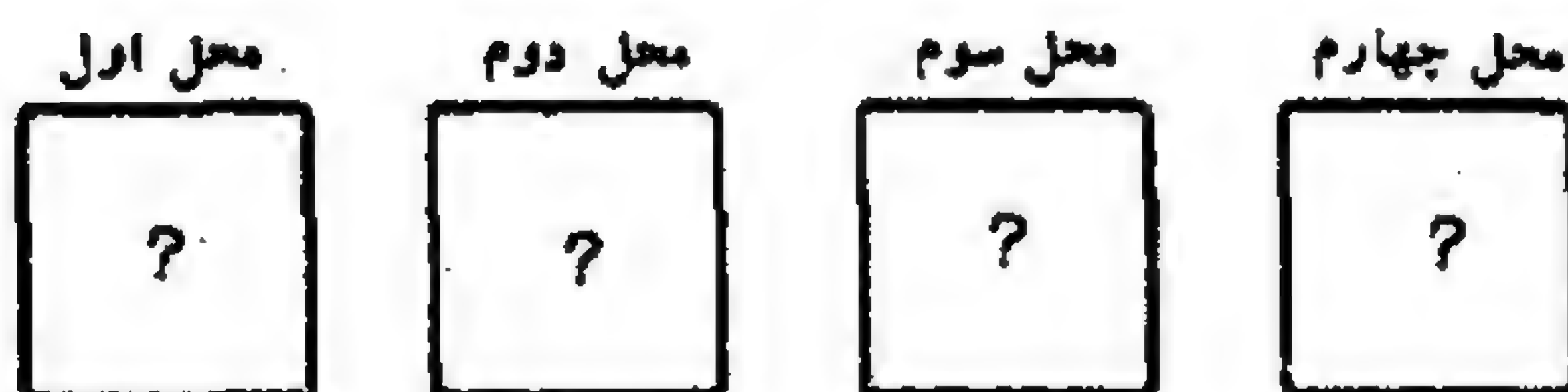
مثال ۱ - با ۸ مداد رنگی دارد و می‌خواهد ۲ مداد از میان ۸ مداد را در دو جامدای قرار دهد؛ به چند طریق ممکن است این کار را انجام دهد؟
حل: در اینجا مسئله مربوط می‌شود به پر کردن دو محل به صورت زیر:



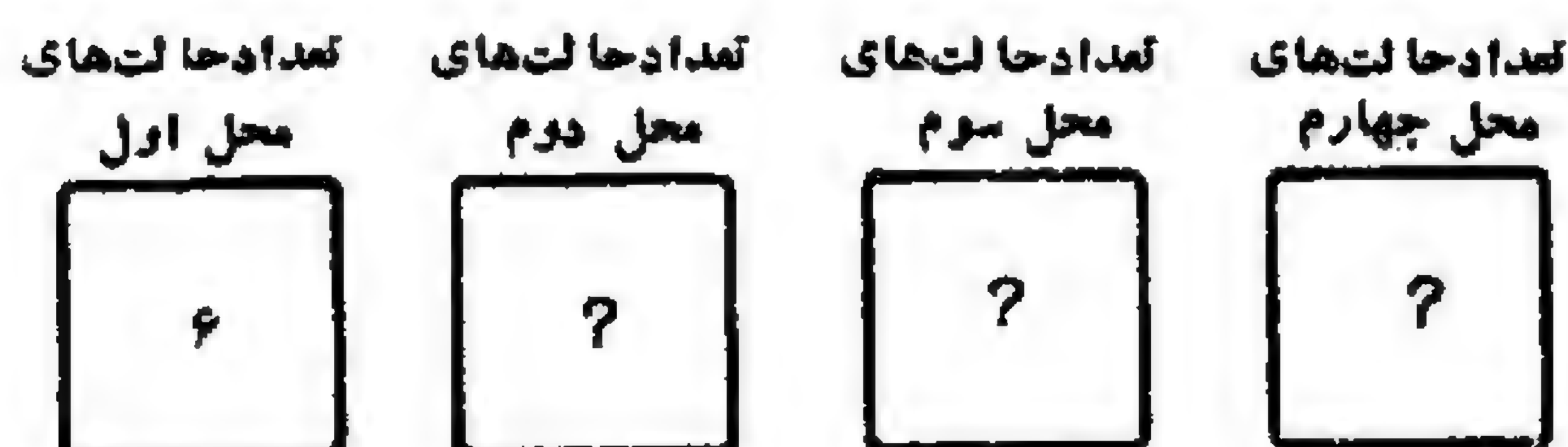
به چند طریق ممکن است مداد اول را انتخاب کرد؟ پس از جادادن مداد اول به چند طریق ممکن است مداد دوم را جاداد؟ طبق اصل شمارش روی هم چند تبدیل خواهیم داشت؟ آیا جواب زیر درست است؟



مثال ۲ - به چند طریق می‌توان یک کلمه ۴ حرفی را با استفاده از حروف کلمه « فوتبال » نوشت (تکرار حروف مجاز نیست و کلمات حاصل ممکن است بی‌معنی باشد)
حل: در اینجا ۴ محل خالی به صورت زیر داریم:



که هر کدام باید بایکی از حروف کلمه فوتبال پر شود. چون « فوتبال » دارای ۶ حرف است، لذا محل اول با هر کدام از این ۶ حرف ممکن است پر شود:



پس از قراردادن حرف اول، ۵ حرف باقی می‌ماند و در نتیجه محل دوم با هر کدام از این ۵ حرف

ممکن است پرشود :

تعداد حالت‌های محل اول	تعداد حالت‌های محل دوم	تعداد حالت‌های محل سوم	تعداد حالت‌های محل چهارم
۶	۵	?	?

وقتی حرف دوم نیز قرار داده شد از حروف کلمه فوتبال فقط ۴ حرف باقی می‌ماند و در نتیجه محل سوم با هر کدام از این ۴ حرف می‌تواند پرشود :

تعداد حالت‌های محل اول	تعداد حالت‌های محل دوم	تعداد حالت‌های محل سوم	تعداد حالت‌های محل چهارم
۶	۵	۴	?

وقتی حرف سوم قرار داده شد سه حرف باقی خواهد ماند و در نتیجه محل چهارم با هر کدام از این سه حرف ممکن است پرشود :

تعداد حالت‌های محل اول	تعداد حالت‌های محل دوم	تعداد حالت‌های محل سوم	تعداد حالت‌های محل چهارم
۶	۵	۴	۳

در نتیجه تعداد تبدیلات ۴ حرف از میان ۶ حرف که به صورت $(۶)_۴$ نمایش داده می‌شود طبق اصل ضرب برابر است با :

$$(۶)_۴ = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳$$

برای این که از این تساوی يك قانون کلی نتیجه بگیریم و مخرج يك را برای طرف راست تساوی در نظر گرفته صورت و مخرج کسر حاصل را در $۲!$ (۲ از تفریق ۶ و ۴ به دست آمده است) ضرب می‌کنیم :

$$(۶)_۴ = \frac{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲!}{۲!}$$

طبق آنچه گفته شد صورت برابر $۶!$ خواهد بود :

$$(۶)_۴ = \frac{۶!}{۲!}$$

عدد ۶ در صورت کسر برابر تعداد تمام حروف و عدد ۲ در مخرج برابر تفاضل ۶ و ۴ (۴ تعداد اشیای انتخاب شده است) می‌باشد . پس :

$$(۶)_۴ = \frac{۶!}{(۶-۴)!}$$

به همین ترتیب تعداد تبدیل r شیء از میان n شیء برابر است با :

$$(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال ۲ - به چند طریق می توان ۵ کارت را از میان ۳۲ کارت در یک ردیف قرار داد .
حل : طبق آنچه گفته شد داریم :

$$\begin{aligned} (32)_5 &= \frac{32!}{(32-5)!} \\ &= \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27!}{27!} \\ &= 32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28 = 24165120 \end{aligned}$$

تمرین

۱- حاصل ضربهای زیر را به صورت فاکتوریل بنویسید :

الف - $1 \times 2 \times 3 \times 4$ ؛ ب - $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ ؛

ج - $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ ؛ د - $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

۲- طرف دیگر تساویهای زیر را به صورت حاصل ضرب اعداد بنویسید :

$8! = ?$ ؛ $10! = ?$ ؛ $5! = ?$ ؛ $7! = ?$

۳- در تساویهای زیر به جای ؟ عدد یا عبارت مناسب بگذارید :

$6! = 6 \times ?$ ؛ $8! = 8 \times ?$ ، $7! = ? \times ? \times 5!$ ، $5 \times 4 \times 3! = ?$ ؛

$9 \times 8 \times 7 \times 6! = ?$ ؛ $8 \times 7 \times 6 \times 5! = ?$

۴- در تساویهای زیر به جای « ؟ » عبارت مناسب بگذارید :

الف - $5 \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 5 \times ?$ ؛ ب - $4 \times (3 \times 2 \times 1) = 4 \times ?$

ج - $13 \times (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 13 \times ?$ ؛ د - $7 \times (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 7 \times ?$

۵- طرف دوم تساویهای زیر را بنویسید :

$6! : 5! = ?$ ؛ $12! : 10! = ?$ ؛ $7! : 6! = ?$

$16! : 14! = ?$ ؛ $12! : 8! = ?$ ؛ $n! : (n-1)! = ?$

۶- تعداد تبدیلات عضوهای مجموعه $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ را بنویسید .

۱ - تعداد تبدیلهای r شیء از میان n شیء را گاهی بصورت P_n^r نیز نمایش می دهند .

۷- با استفاده از فرمولهای خوانده شده طرف دیگر تساویهای زیر را بنویسید :

$$(m)_r = ? \quad ; \quad (k)_r = ? \quad ; \quad (m)_\lambda = ? \quad ; \quad (q)_r = ? \quad ; \quad (v)_\delta = ?$$

۸- با حروف P, T, S و M چند تبدیل سه حرفی می توان نوشت .

۹- چند کلمه مختلف (بامعنی یا بی معنی) با استفاده از حروف کلمه « مولانا » می توان نوشت هر گاه :

الف - در هر مرتبه تمام حروف به کار رود . ب - در هر مرتبه نصف تعداد حروف به کار رود .

۱۰- چند تبدیل مختلف ممکن است با حروف A, B, C و D نوشت هر گاه ، حرف اول تبدیلهای حاصل همیشه A باشد .

ترکیب

مثال ۱ - قرار است يك کمیته دو نفری از بین دانش آموزان « یاسمین ، فرزانه ، سوسن » تشکیل شود ؛ تعیین کنید به چند طریق مختلف اعضای این کمیته ممکن است انتخاب شود . روشن است که يك انتخاب « یاسمین ، سوسن » خواهد بود . آیا می توانید انتخابهای دیگری را نام ببرید؟ آیا غیر از انتخابهای « یاسمین ، سوسن » ، « سوسن ، فرزانه » ، « یاسمین ، فرزانه » انتخاب دیگری برای این کمیته می دانید ؟

از نظر تبدیل بحث فوق تبدیل دوتنفر از میان ۳ نفر است و این تبدیلهای عبارتند از :

« فرزانه ، سوسن » ؛ « یاسمین ، فرزانه » ، « یاسمین ، سوسن »

« سوسن ، فرزانه » ؛ « فرزانه ، یاسمین » ؛ « سوسن ، یاسمین »

ولی از نظر ترکیب « سوسن ، فرزانه » و « فرزانه ، سوسن » هر دو تشکیل يك کمیته می دهند . به عبارت دیگر ، تقدم و تاخر آنها تغییری در کمیته نمی دهد . پس برای این کمیته سه انتخاب زیر را خواهیم داشت :

« فرزانه ، سوسن » ؛ « یاسمین ، فرزانه » ؛ « یاسمین ، سوسن » .

در انتخاب کردن هر گاه ترتیب انتخاب مهم نباشد هر کدام از حالت های انتخاب را يك « ترکیب » می نامند . در مثال بالا هر کدام از انتخاب ها يك « ترکیب » ۲ نفر از میان ۳ نفر می باشد .

مثال ۲ - چهار کتاب با حروف A, B, C و D مشخص شده اند؛ تعیین کنید به چند طریق ممکن است :

الف - سه کتاب را از میان ۴ کتاب در سه محل خالی قرارداد .

ب - سه کتاب را از میان ۴ کتاب برای هدیه دادن به يك نفر انتخاب کرد .

همان طور که دیدید ، در قرار دادن کتابها در محل خالی تقدم و تاخر کتابها در نظر گرفته می شود ، در نتیجه برای پر کردن سه محل خالی با ۴ کتاب باید از تبدیل ۳ شیء از ۴ شیء استفاده کرد :

$${}_4P_3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \frac{4!}{1} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

این تبدیلهای عبارتند از :

ABC	ACB	BCA	BAC	CAB	CBA
ACD	ADC	CDA	DAC	CAD	DCA
ABD	ADB	BAD	BDA	DAB	DBA
BCD	BDC	CDB	CBD	DBC	DCB

پ - در انتخاب ۳ کتاب از میان ۴ کتاب به منظور هدیه دادن ، واضح است که تقدم و تاخر کتابها نقشی ندارد. به عبارت دیگر، تبدیلهای ABC، ACB، BCA، BAC، CAB، CBA همگی سه کتاب A، B و C و یا يك انتخاب برای هدیه دادن مشخص می سازند. لذا حالت های انتخابهای ۳ کتاب از میان ۴ کتاب برای اهدا برابر است با :

ABC، ACD، ABD، BCD

هر کدام از انتخابهای فوق يك ترکیب ۳ حرف از ۴ حرف می باشد .
 تعریف - يك ترکیب r شیء از n شیء متمایز عبارت است از انتخاب r شیء از این اشیا بدون جایگذاری مجدد و بدون در نظر گرفتن ترتیب آنها .
 توجه کنید که در تبدیل اگر ترتیب قرار گرفتن اشیا را عوض کنیم يك حالت جدید بدست می آید در صورتیکه جایجا کردن اشیا در ترکیب حالت جدیدی را بوجود نمی آورد .
 تعداد ترکیب های ۳ حرف از ۴ حرف A، B، C و D برابر با تعداد زیر مجموعه های سه عضوی از مجموعه {A, B, C, D} است بطوریکه می دانید ترتیب نوشتن اعضا در يك مجموعه مهم نیست . زیر مجموعه های سه عضوی از مجموعه چهار عضوی بالا عبارتند از :
 {A,B,C}، {A,C,D}، {B,C,D}، {A,B,D}
 که تعداد آنها با تعداد ترکیب های ۳ حرف از ۴ حرف برابر است .

تعداد ترکیبهای r شیء از n شیء متمایز

مثال ۱ - دیدید که ترکیبهای ۳ کتاب از میان ۴ کتاب A، B، C و D عبارتند از :

ABC، ACD، ABD، BCD .

در اینجا هر ترکیب شامل سه شیء است. و طبق آنچه راجع به تبدیل گفته شد، تعداد تبدیلهای هر یک از این سه شیء برابر $3!$ است. به عبارت دیگر از هر ترکیب $3!$ تبدیل به دست می آید. این مطلب از روی جدول زیر به خوبی دیده می شود:

ترکیبها	تبدیلهای حاصل					
ABC	ABC	ACB	BCA	BAC	CAB	CBA
ACD	ACD	ADC	CAD	CDA	DAC	DCA
ABD	ABD	ADB	BAD	BDA	DAB	DBA
BCD	BCD	BDC	CDB	CBD	DBC	DCB

پس طبق آنچه گفته شد داریم:

$$\text{تعداد تبدیلهای} = (\text{تعداد ترکیبها}) \times 3!$$

هرگاه تعداد ترکیبهای 3 شیء از 4 شیء را به صورت $\binom{4}{3}$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$3! \times \binom{4}{3} = (4)_3$$

و یا:

$$\binom{4}{3} = \frac{(4)_3}{3!}$$

به جای صورت کسر طرف راست مقدارش را قرار می دهیم:

$$\binom{4}{3} = \frac{\frac{4!}{(4-3)!}}{3!}$$

و یا:

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \quad (\text{الف})$$

چه ارتباطی بین 4 و 3 داخل پرانتز و 4 و 3 صورت و مخرج می بینید؟

مثال ۲ - به چند طریق می توان 2 حرف را از حروف a, b, c, d, e انتخاب کرد

(ترکیب 2 شیء از 5 شیء) تعداد تبدیلهای 2 حرف از 5 حرف را به صورت $(5)_2$ نشان دادیم. از طرفی دیدیم که هر ترکیب دو حرفی به تعداد $2!$ تبدیل به وجود می آورد؛ پس داریم:

$$2! \times \binom{5}{2} = (5)_2$$

و یا :

$$\binom{5}{2} = \frac{(5)_2}{2!}$$

به جای $(5)_2$ مقدارش را قرار می دهیم :

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)! 2!}$$

و یا :

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} \quad (\text{ب})$$

در تساویهای الف و ب بالا دیده می شود که کسرهای طرف راست از سه عدد تشکیل شده اند ؛ عدد صورت برابر تعداد کل اشیای مورد بحث است ؛ اما اعداد مخرج به ترتیب عدد اشیای انتخاب شده و تفاضل کل اشیا از این عدد می باشد .
 باروشی کاملاً متشابه می توان فرمول تعداد ترکیبهای r شیء از n شیء را به دست آورد :

$$\boxed{\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

در اینجا n تعداد کل اشیا و r تعداد اشیای انتخاب شده است^۱ . در حقیقت این فرمول تعداد زیرمجموعه های r عضوی از يك مجموعه n عضوی را به دست می دهد .
 مثال ۳ - به چند طریق می توان يك کمیته ۵ نفری را از میان ۹ نفر انتخاب کرد ؟
 حل :

$$\begin{aligned} \binom{9}{5} &= \frac{9!}{5!(9-5)!} \\ &= \frac{9!}{5! \times 4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126 \end{aligned}$$

مثال ۴ - نشان دهید که تساویهای زیر درست است :

$$\text{الف - } \binom{n}{0} = 1 \quad ; \quad \text{ب - } \binom{n}{n} = 1 \quad ; \quad \text{ج - } \binom{n}{n} = 1 \quad ; \quad \text{د - } \binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$$

۱- تعداد ترکیبهای r شیء از n شیء را با C_n^r نیز نشان می دهند .

حل : طبق دستور کلی داریم :

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \times n!} = 1 \quad \text{الف -}$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{1 \times (n-1)!} = n \quad \text{ب -}$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n!} = 1 \quad \text{ج -}$$

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r} \quad \text{د -}$$

تعداد ترکیبهای r شیء از n شیء برابر است با تعداد ترکیبهای $n-r$ شیء از n شیء .

مثال ۵ - به چند طریق مختلف ممکن است يك کمیته سه نفری را از میان ۴ زوج (زن و شوهر) انتخاب کرد هر گاه :

الف - محدودیتی در انتخاب آنها وجود نداشته باشد .

ب - کمیته باید از ۲ زن و يك مرد تشکیل شده باشد .

حل : الف - در انتخاب عضوهای کمیته تقدم و تأخر عضوها در نظر گرفته نمی شود . بنابراین در اینجا منظور تعیین تعداد ترکیبهای ۳ شیء از ۸ شیء است که با توجه به فرمول خوانده شده عبارت است از :

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = 56$$

ب - دو زن از میان ۴ زن می تواند به $\binom{4}{2}$ طریق انتخاب شود ؛ بعد از این که دو زن با یکی از این طرق انتخاب شد ، يك مرد از میان ۴ مرد نیز می تواند به $\binom{4}{1}$ طریق انتخاب گردد ؛ در نتیجه بنا بر اصل ضرب تعداد راهها برای انتخاب دو زن و يك مرد برابر است با :

$$\binom{4}{2} \times \binom{4}{1} = 24$$

تمرین

۱ - تعداد ترکیبهای زیر را حساب کنید :

$$\binom{7}{3} ; \binom{6}{5} \quad \binom{11}{7} ; \binom{12}{11}$$

۲- با استفاده از دستور خوانده شده درستی تساویهای زیر را نشان دهید .

$$\binom{11}{7} = \binom{11}{4} , \binom{4}{3} = \binom{4}{1} , \binom{8}{5} = \binom{8}{3} , \binom{6}{5} = \binom{6}{1}$$

۳- با استفاده از دستور خوانده شده درستی تساویهای زیر را نشان دهید :

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} + \binom{5}{1} , \binom{7}{5} = \binom{7}{2} + \binom{7}{3} , \binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$$

۴- هرگاه $\binom{n}{n-3} = 10$ ، تعیین کنید مقدار n را .

۵- هرگاه $\binom{n}{r} = 10$ و $(x)_r = 60$ ، تعیین کنید مقادیر n و r را .

۶- قرار است يك کمیته ۵ نفری از میان ۱۲ نفر دانش آموز انتخاب شود . تعیین کنید به چند طریق می توان عضوهای این کمیته را انتخاب کرد .

۷- ۵ نفر دانش آموز که ۳ نفر آنها کلاس اول و دو نفر کلاس سوم است ، برای انتخاب در يك کمیته دو نفری در نظر گرفته شده اند ؛ تعیین کنید تعداد راههای ممکن برای انتخاب این کمیته را هرگاه :

الف - دو عضو کمیته دانش آموز کلاس اول باشند ، ب - يك عضو کمیته دانش آموز کلاس اول و عضو دیگر کلاس سوم باشد .

۸- خواربار فروشی ۵ نوع آشامیدنی مختلف دارد . شخصی می خواهد ۲ نوع آشامیدنی برای مهمانان خود انتخاب کند ؛ تعیین کنید : الف - تعداد انتخابهای او را ، ب - دو انتخاب $\binom{5}{3}$ و $\binom{5}{2}$ چه فرقی دارند ؟

۹- يك کیسه محتوی ۷ مهره قرمز و ۵ مهره سفید است ؛ تعیین کنید به چند طریق می توان ۶ مهره متشکل از ۳ مهره قرمز و ۳ مهره سفید را از این کیسه انتخاب کرد .

۱۰- به چند طریق می توان يك کمیته را از میان ۷ نفر زن و ۶ نفر مرد انتخاب کرد هرگاه قرار باشد اعضای کمیته از ۳ زن و ۲ مرد تشکیل گردد .

۱۱- شخصی ۸ تمبر ایرانی متمایز و ۱۵ تمبر خارجی متمایز دارد ؛ تعیین کنید او به چند طریق می تواند ۳ تمبر ایرانی و سه تمبر خارجی را از میان آنها انتخاب نماید .

احتمال

تجربه تصادفی

بعضی از تجربه‌ها هستند که نتیجه آنها از قبل کاملاً مشخص است. مثلاً وقتی سنگی را پرتاب کنیم این سنگ به زمین می‌افتد و یا اگر مقداری آب را به اندازه معینی حرارت دهیم آب تبدیل به بخار می‌گردد. در مقابل تجربه‌های دیگری وجود دارد که نتیجه آنها را نمی‌توان از قبل به‌دقت تعیین نمود و فقط پس از انجام تجربه نتیجه آنها مشخص می‌گردد. اینگونه تجربه‌ها را تجربه تصادفی می‌نامند.

برای روشن شدن مطلب به مثالهای زیر توجه کنید:

۱- هرگاه يك سكه را به هوا بیندازیم،

این سكه در فرود آمدن شیر یا خط می‌نشیند.

به عبارت دیگر، در پرتاب سكه دو نتیجه ممکن

است به دست آید، شیر یا خط. تنها پس از نشستن

سكه می‌توان گفت که آن سكه شیر یا خط نشسته است.

۲- يك دسته کارت موجود است؛ نام هریك از دانش‌آموزان يك كلاس را روی يك کارت

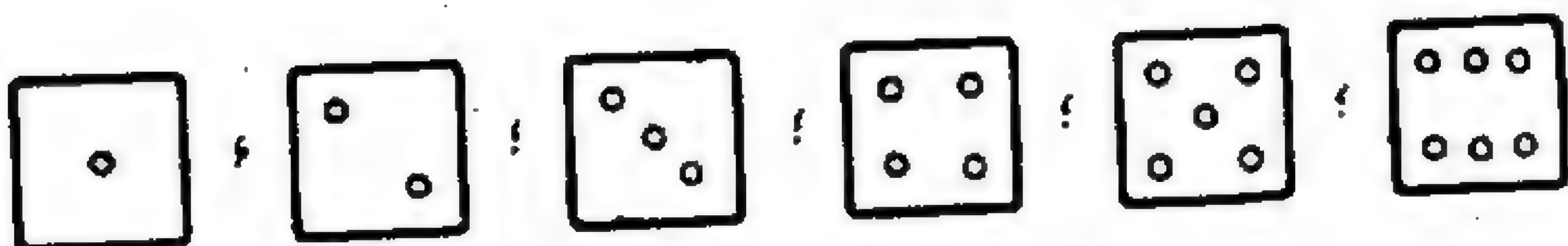
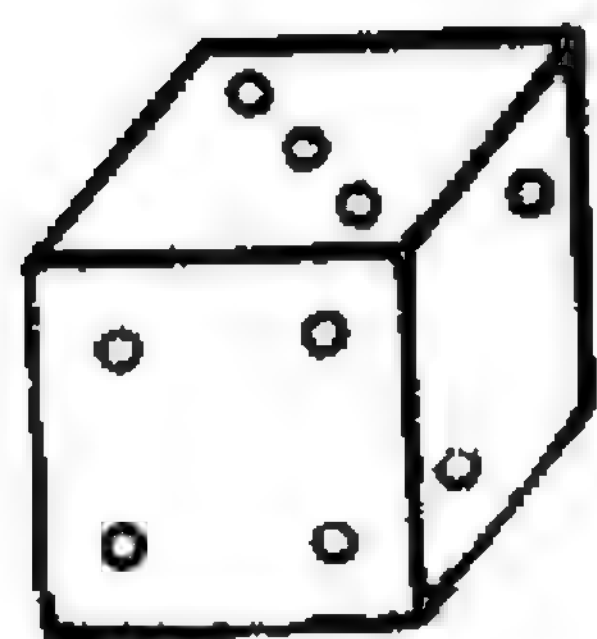
نوشته پس از مخلوط کردن کارت‌ها، يك کارت را به طور قرعه برمی‌داریم؛ روشن است که نام یکی

از دانش‌آموزان در این قرعه بیرون خواهد آمد؛ نتیجه ممکن از این قرعه بیرون آمدن نام يك

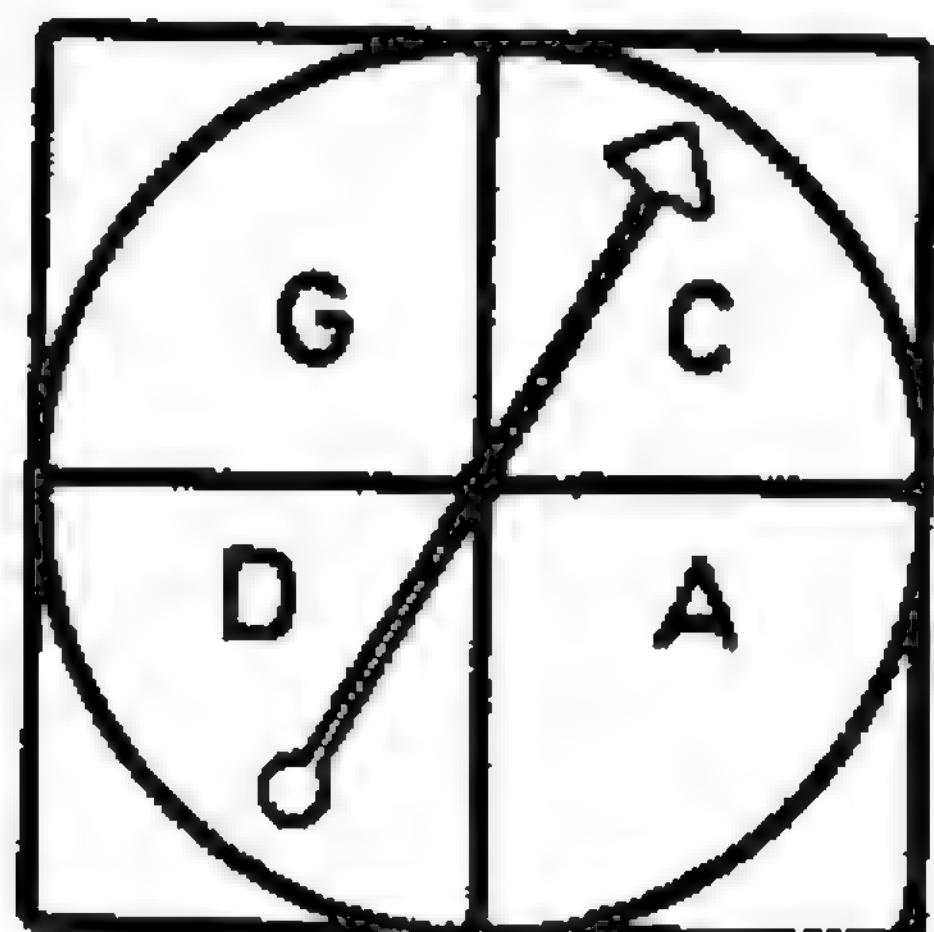
دانش‌آموز است. تنها پس از کشیدن قرعه می‌توان گفت که نام کدام يك از دانش‌آموزان بیرون آمده است.

۳- يك تاس را می‌ریزیم؛ نتیجه ممکن پس از نشستن تاس روشن شدن یکی از اعداد ۱ تا ۶

است، ولی قبل از نشستن تاس به هیچ وجه نمی‌توان گفت که تاس به طور قطع روی چه پهلویی رو خواهد شد.



۴- در دستگاه زیر صفحه دایره‌ای به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است؛ این قسمت‌ها با رنگ‌های قرمز (G)، سفید (C)، سبز (D) و آبی (A) از یکدیگر متمایز شده‌اند؛ هرگاه عقربه دستگاه را که روی یک سوزن در مرکز صفحه قرار داده



بچرخانیم، پس از چرخش، عقربه در یکی از این چهار ناحیه متوقف خواهد شد؛ ولی قبل از توقف کامل عقربه، به هیچ وجه نمی‌توان گفت که عقربه روی کدام ناحیه توقف خواهد کرد.

۵- کیسه‌ای محتوی یک مهره قرمز، یک مهره سیاه و یک مهره سفید است؛ هرگاه یک مهره را از داخل کیسه بیرون آوریم، نتیجه ممکن عبارت خواهد بود از یک مهره قرمز یا سفید یا سیاه.

پرتاب سکه، کشیدن قرعه، انداختن تاس، چرخش عقربه روی صفحه‌دنگی یا مددج و بیرون کشیدن مهره از کیسه نمونه‌هایی از تجربه‌های تصادفی هستند. در این انواع تجربه‌ها قبل از معلوم شدن نتیجه به‌طور قطع نمی‌توان تعیین کرد که کدام یک از نتایج ممکن این تجربه به دست خواهد آمد.

مطالعه پدیده‌های تصادفی حساب احتمالات را تشکیل می‌دهد. ما در اینجا حساب احتمالات را در یک حالت ساده مورد مطالعه قرار می‌دهیم. بخصوص برای ساده شدن مطالب فرض می‌کنیم که تعداد نتایج تجربه‌های تصادفی که با آنها سروکار داریم متناهی می‌باشد.

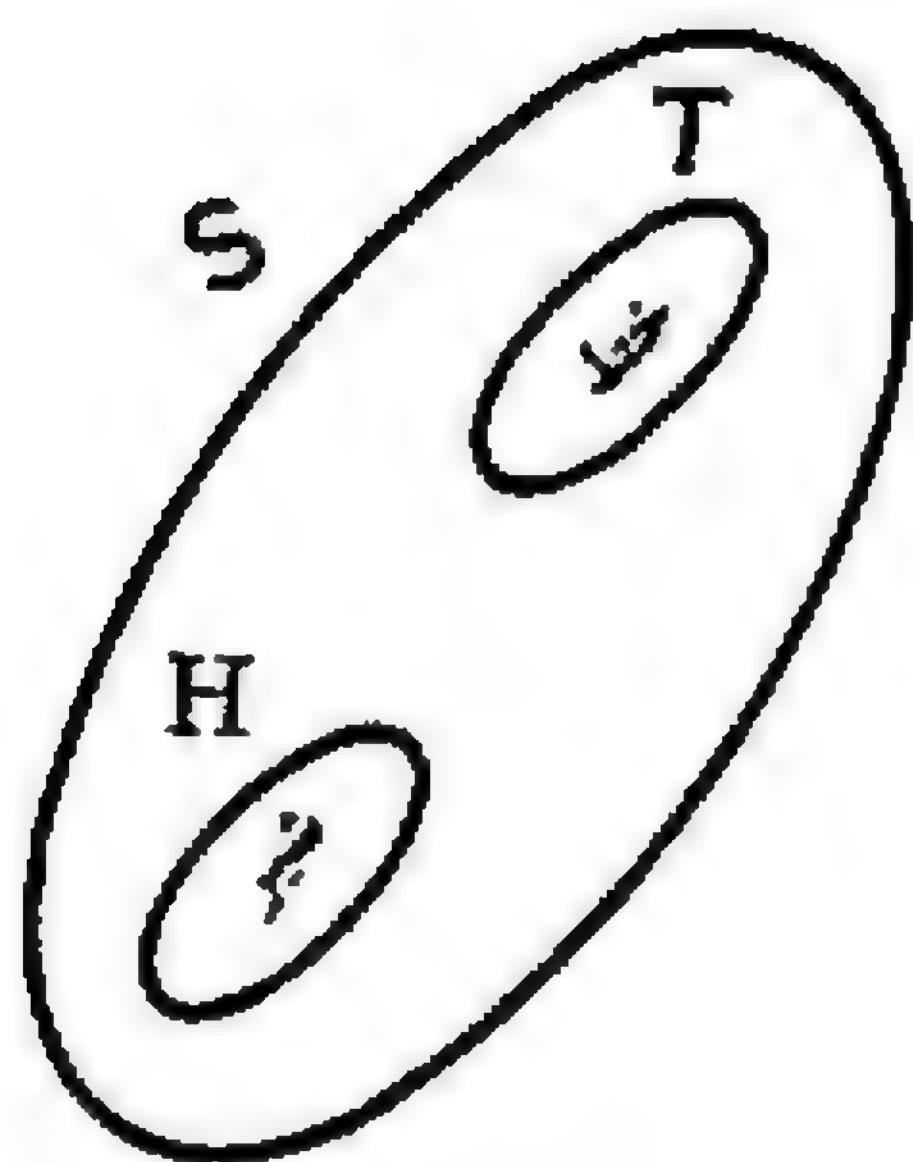
فضای نمونه‌ای

۱- یک سکه به هوا انداخته می‌شود. این سکه در

فرود آمدن شیر (H) یا خط (T) می‌نشیند؛ مجموعه:

$$S = \{H, T\}$$

که تمام نتیجه‌های ممکن این تجربه را نشان می‌دهد، به نام فضای نمونه‌ای تجربه تصادفی نامیده می‌شود. هر کدام از عضوهای H یا T به نام یک نقطه از فضای نمونه‌ای خوانده می‌شود.

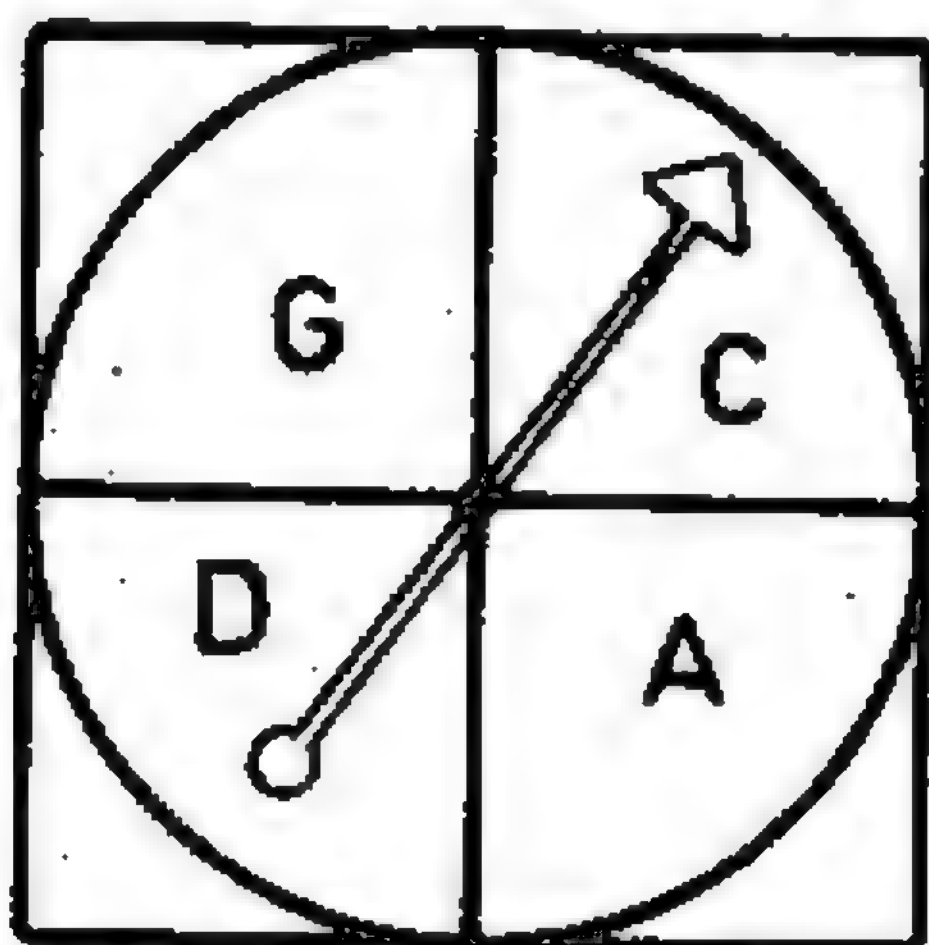


۲- یک تاس ریخته می‌شود، بعد از نشستن این تاس یکی از وجه‌های ۱ تا ۶ رو خواهد شد

۱- حالات استثنایی توقف عقربه روی مرزها در نظر گرفته نمی‌شود.

۲- H حرف اول کلمه Head به معنی شیر و T حرف اول کلمه Tail به معنی خط می‌باشد.

مجموعه: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، که تمام نتیجه‌های ممکن این تجربه را نشان می‌دهد، به نام فضای نمونه‌ای این تجربه خوانده می‌شود. این مجموعه دارای 6 عضو است.



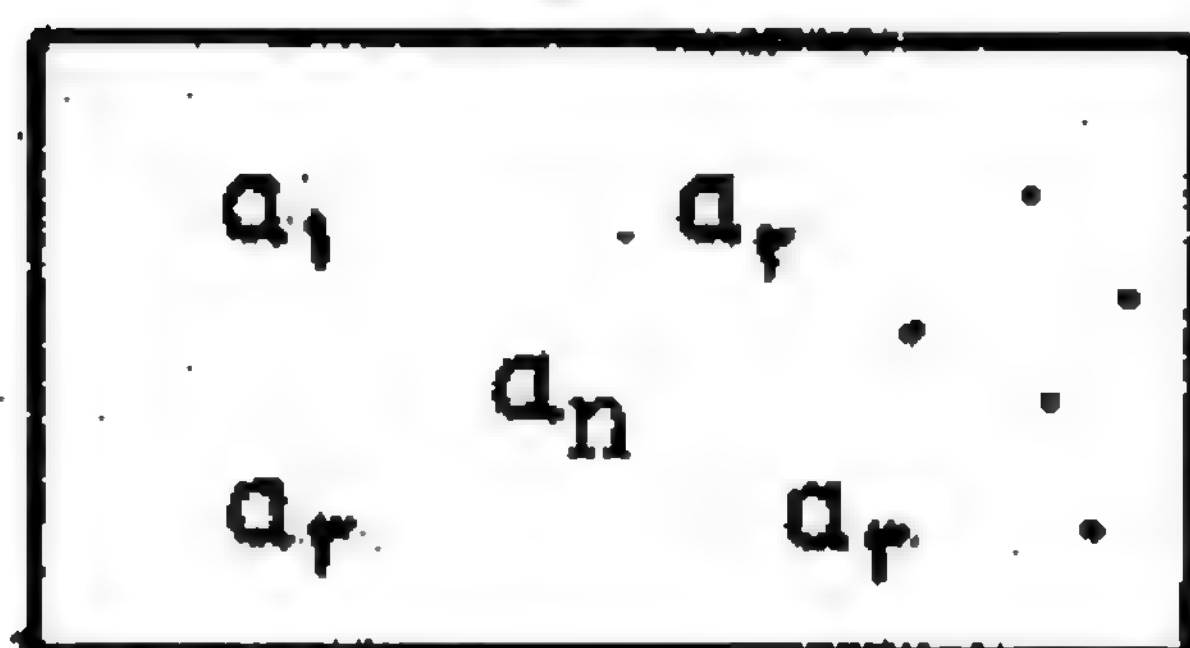
۳- در دستگاه متقابل عقربه را به چرخش درمی‌آوریم؛

مجموعه:

$$S = \{G, C, A, D\}$$

که تمام نتیجه‌های ممکن این تجربه را نشان می‌دهد به نام فضای نمونه تجربه خوانده می‌شود.

مجموعه S



۴- در پاسخ دادن به پرسشهای دوجوابی،

فضای نمونه‌ای عبارتست از $S = \{\text{نه}, \text{بلی}\}$

تعریف - هرگاه a_1, a_2, \dots, a_n همه نتیجه‌های

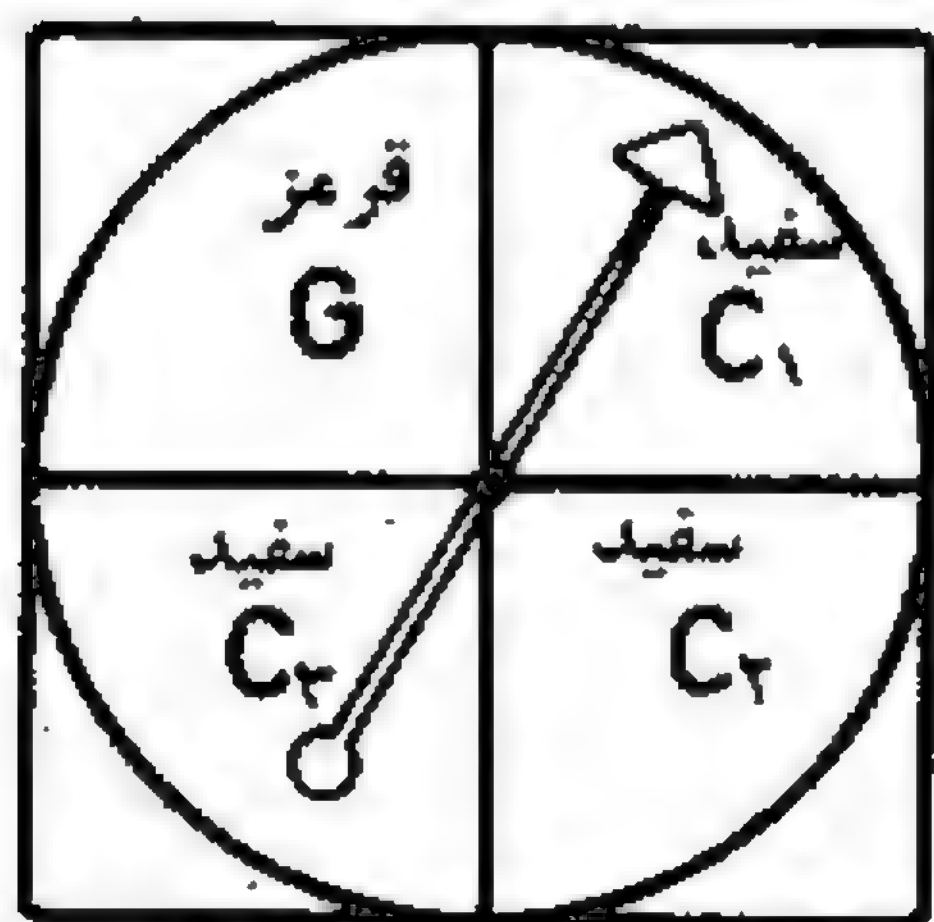
ممکن یک تجربه تصادفی باشد مجموعه:

$$S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

به نام فضای نمونه‌ای خوانده می‌شود. هر عضو S یک نقطه از فضای نمونه‌ای نامیده می‌شود.

پیشامد تصادفی

گفتیم که در ریختن یک تاس فضای نمونه‌ای برابر است با $S = \{1, 2, 3, \dots, 6\}$ هرگاه در این تجربه، روشن شدن یکی از پهلوها که روی آن شماره زوج نوشته شده است مطلوب ما باشد مجموعه $A = \{2, 4, 6\}$ که تمام نتیجه‌های مطلوب را نشان می‌دهد، به نام یک پیشامد تصادفی خوانده می‌شود. روشن است که $A \subset S$.



در شکل مقابل هرگاه توقف عقربه در ناحیه سفید مطلوب باشد، مجموعه $B = \{C_1, C_2, C_3\}$ که تمام نتیجه‌های مطلوب را نشان می‌دهد به نام یک پیشامد تصادفی خوانده می‌شود.

تعریف ۱- در یک تجربه تصادفی پیشامد تصادفی زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای آن

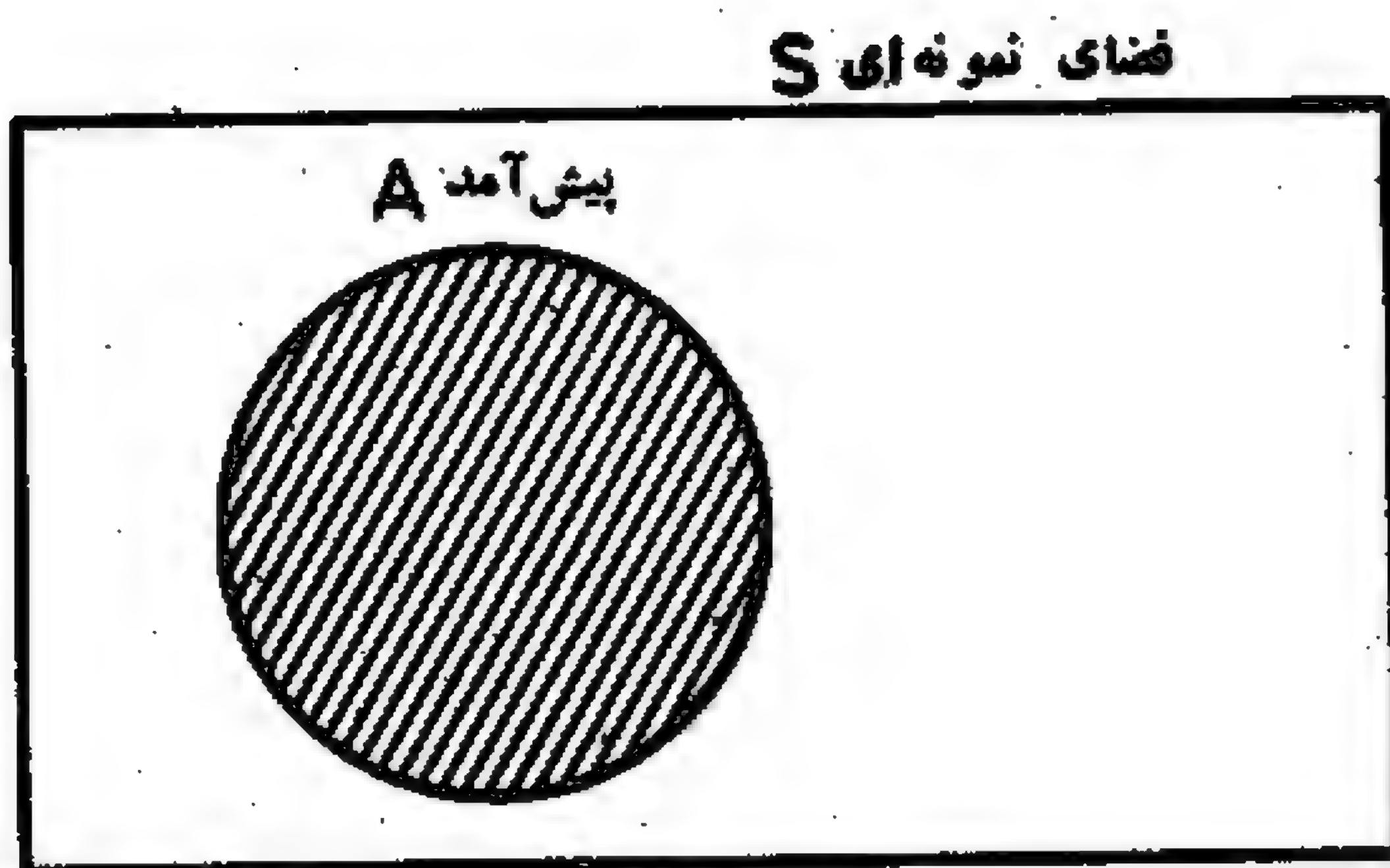
تجربه است. به عبارت دیگر، هرگاه S فضای نمونه تجربه تصادفی باشد، A یک پیشامد تصادفی خوانده می‌شود، اگر و فقط اگر $A \subset S$.

تعریف ۲- اگر A پیش‌آمدی از یک تجربه تصادفی معین باشد، در هر بار انجام این تجربه

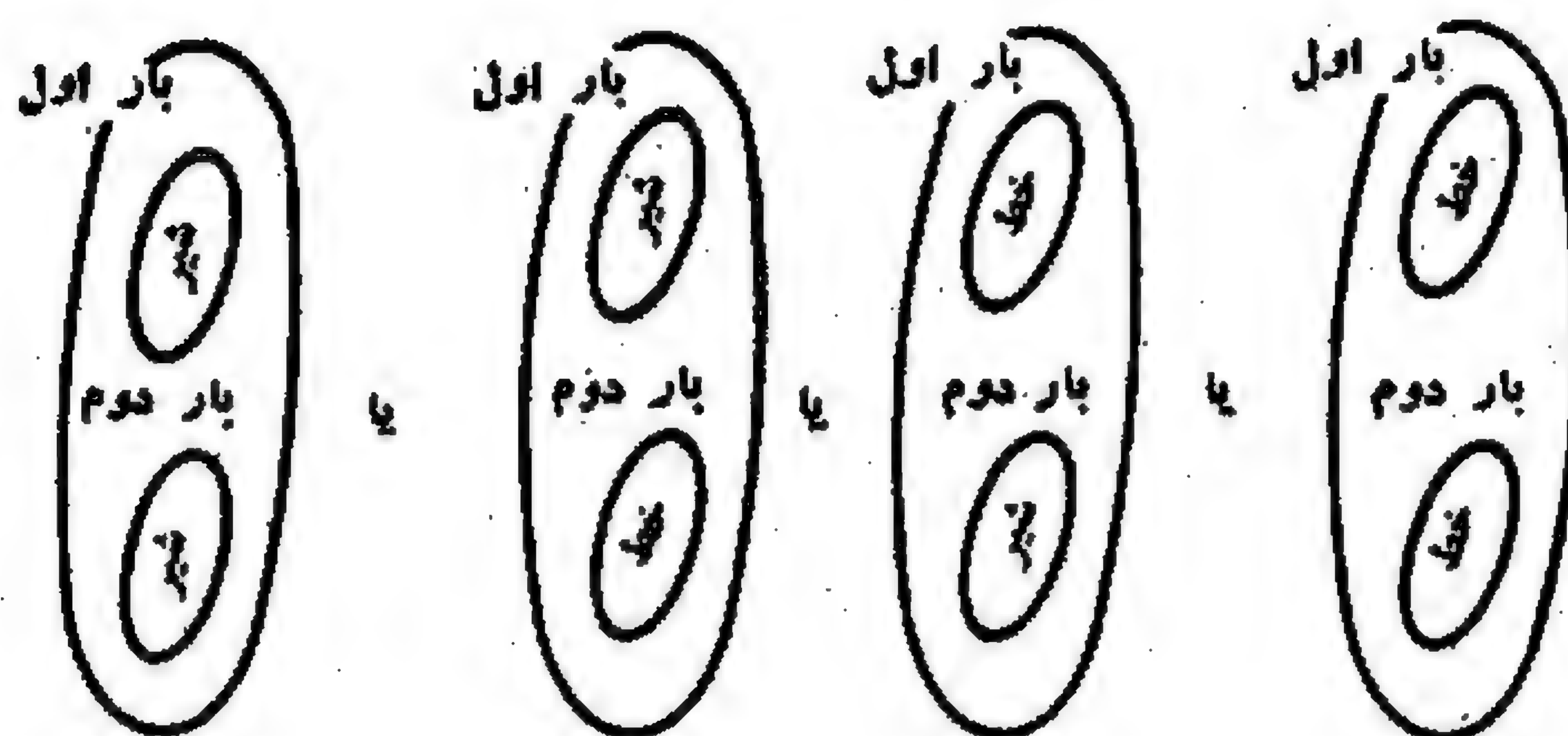
گفته می‌شود پیش‌آمد A رخ داده است هرگاه نتیجه به دست آمده عضو A باشد.

مثال ۱ - يك سكه دوبار به

هوا انداخته می‌شود ؛ فضای نمونه‌ای و پیشامد تصادفی را که عبارت از ظاهر شدن شیر در هر دو بار پرتاب یا ظاهر شدن خط در هر دو بار پرتاب باشد بنویسید .



حل : این سکه‌ها در موقع نشستن به یکی از صورتهای زیر رو خواهد شد :

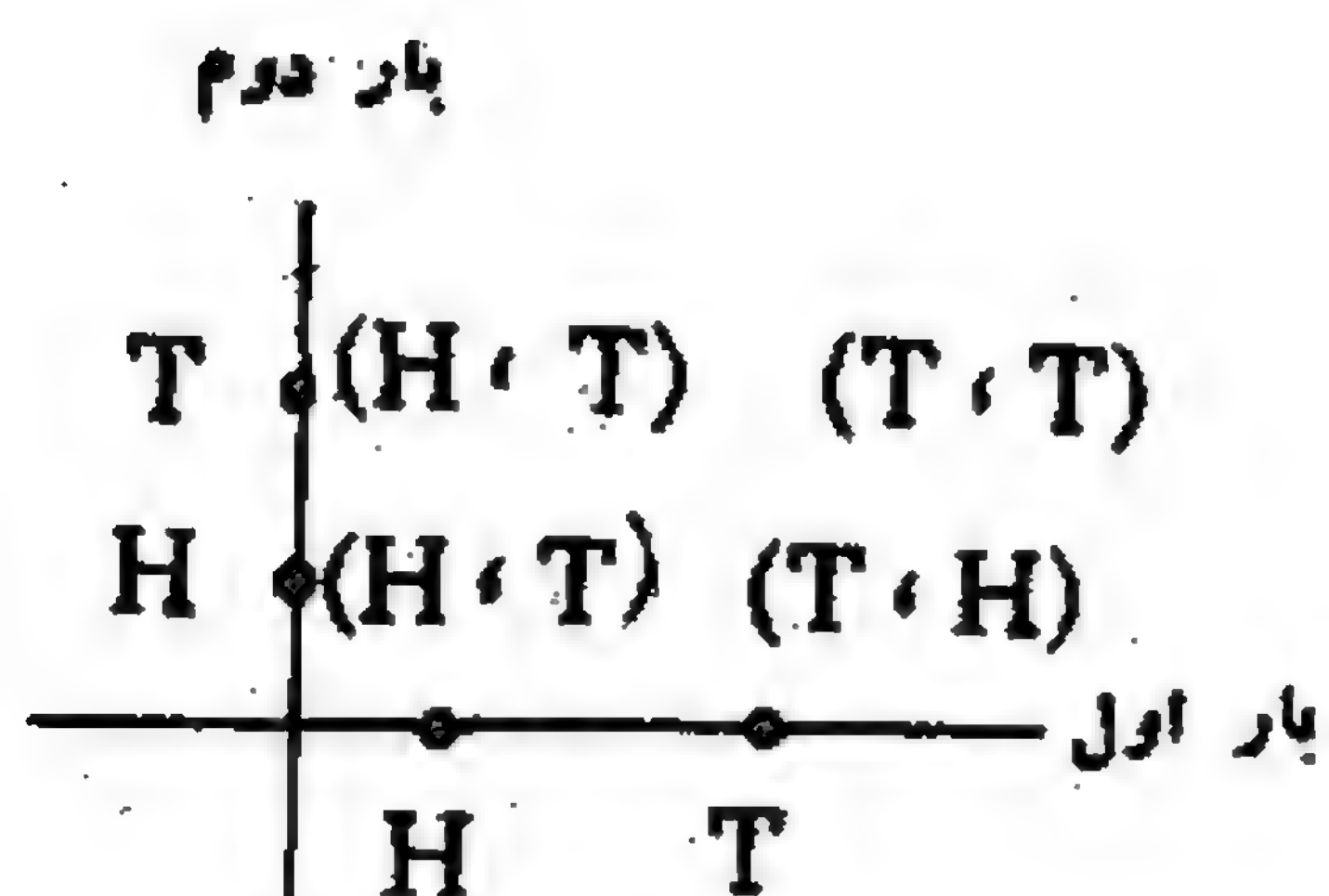


هر گاه نتیجه شیر آمدن سکه را با H و نتیجه خط آمدن آن را با T نشان دهیم ، مجموعه نتیجه‌های هر بار پرتاب برابر $A = \{H, T\}$ است ، با توجه به آنچه در حاصل ضرب دکارتی مجموعه A در خودش گفتیم ، حالات مختلفی که سکه در دو بار ممکن است با هم به زمین بنشینند و یا به عبارت دیگر فضای نمونه‌ای این تجربه برابر است با :

$$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

		بار دوم	
		H	T
بار اول	H	(H, H)	(H, T)
	T	(T, H)	(T, T)

برای بدست آوردن فضای نمونه‌ای می‌توان از نمودار صفحه‌بعد نیز استفاده کرد :



براین تجربه پیشامد تصادفی A یعنی شیر آمدن هر دومرتبه یا خط آمدن هر دومرتبه عبارت است از :

$$A = \{(H, H) (T, T)\}$$

پیشامد A زیر مجموعه ای از فضای نمونه ای S است.

این پیشامد در شکل مقابل نشان داده شده است.

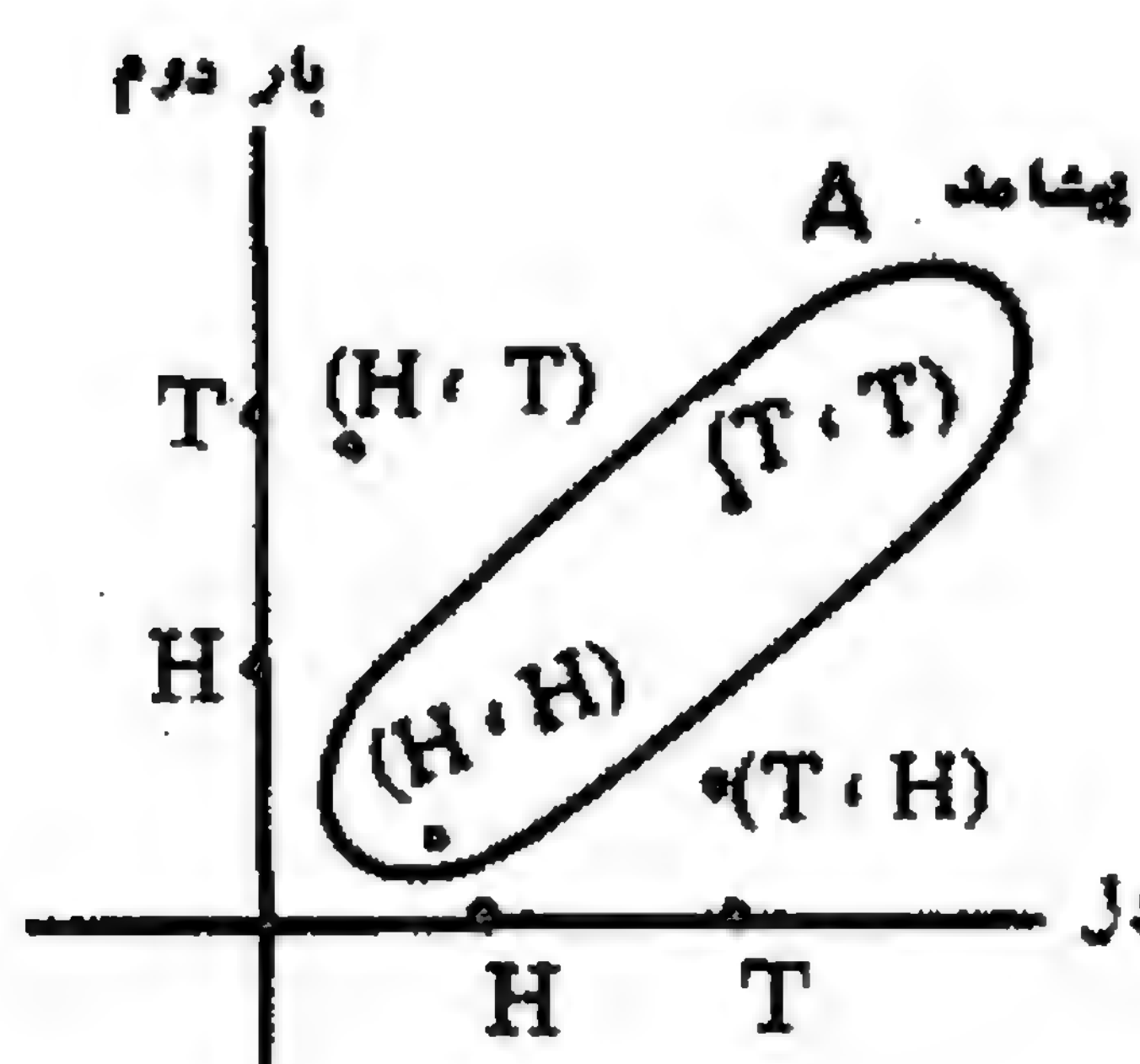
مثال ۴ - يك سكه سه بار پرتاب می شود.

مطلوب است تعیین : الف - فضای نمونه ای

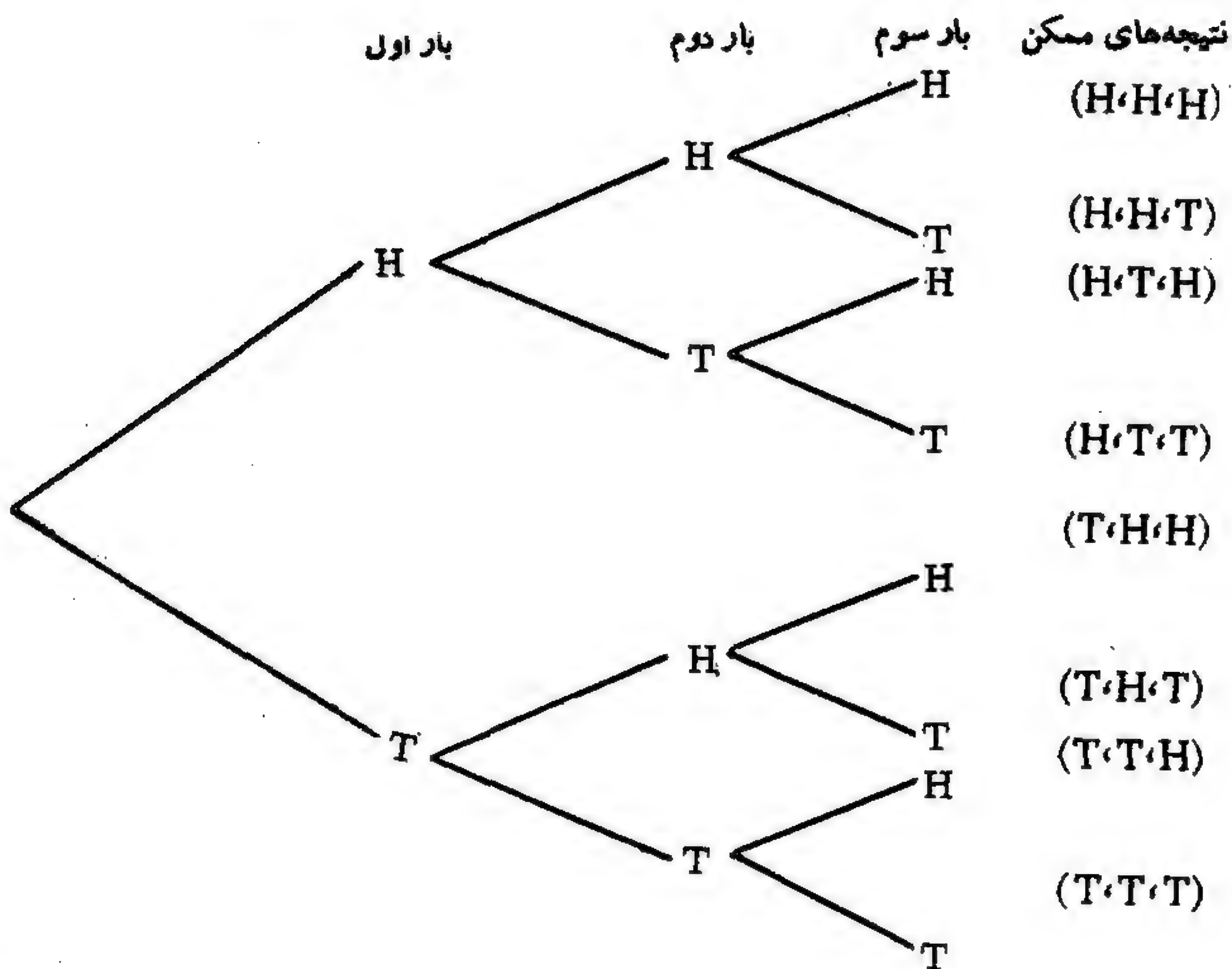
این تجربه تصادفی. ب - پیشامد A که در آن سكه

هر سه بار خط بیاید. ج - پیشامد B که در آن فقط بار اول

يك خط بیاید.



حل : دراین تجربه عضوهای فضای نمونه ای به صورت زیر مشخص می شوند :



در نتیجه فضای نمونه‌ای این تجربه تصادفی عبارت است از :

$$S = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,H,T), (T,T,H), (T,T,T)\}$$

و پیشامدهای خواسته شده عبارتند از :

$$A = \{(T,T,T)\}$$

$$B = \{(H,H,T), (H,T,H), (T,H,H)\}$$

مثال ۳ - يك تاس قرمز و يك تاس سبز باهم ریخته می‌شوند ؛ الف - فضای نمونه‌ای

این تجربه را با نمودار مختصاتی نشان دهید . ب - پیشامد A که در آن مجموع اعداد رو شده دو تاس کمتر از ۴ یا مساوی ۴ است مشخص کنید .

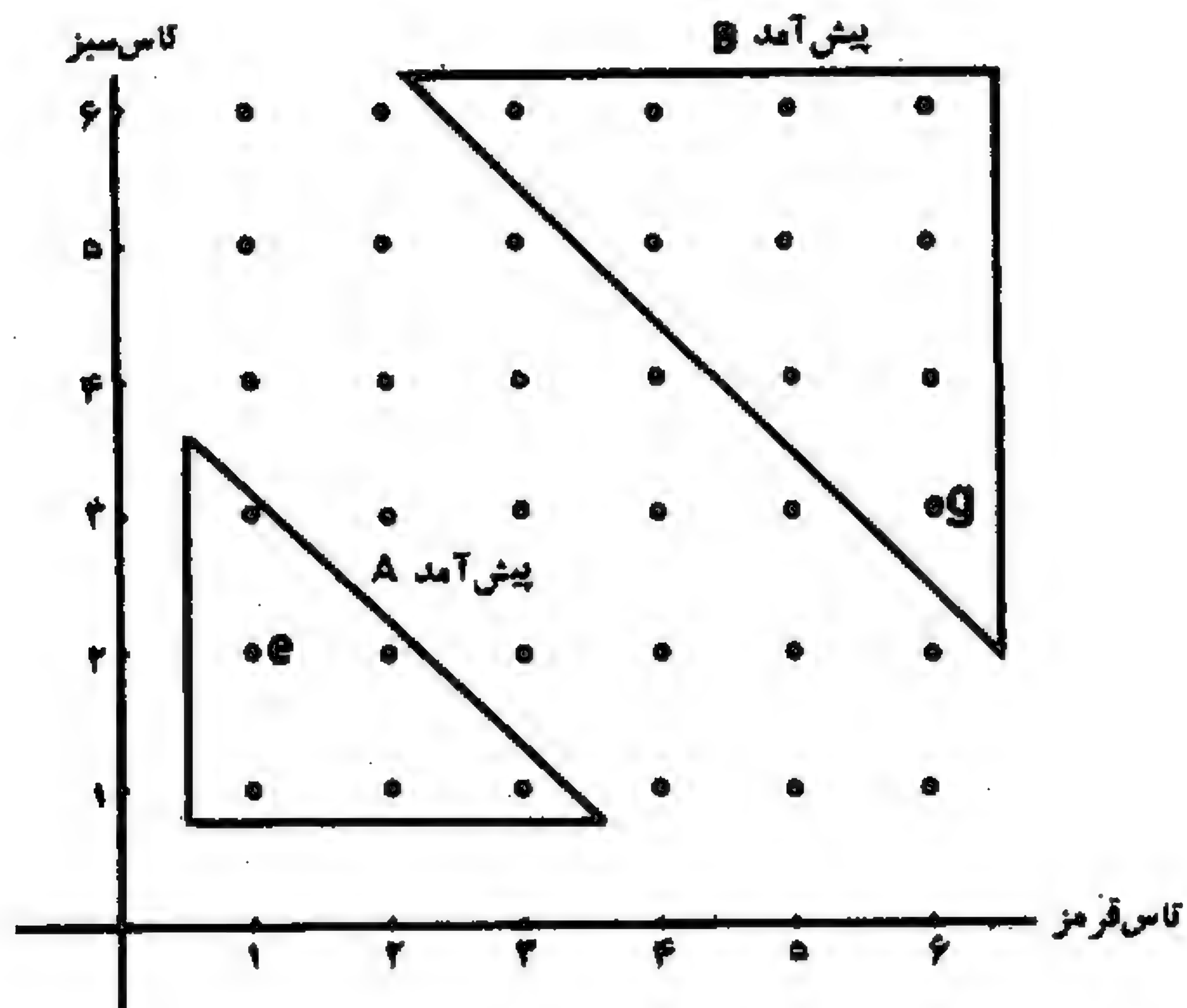
ج - پیشامد B را که در آن مجموع اعداد روی دو تاس از ۸ بیشتر باشد بنویسید .

حل : فرض کنیم $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. فضای نمونه‌ای این تجربه عبارت از

$K \times K$ است که دارای ۳۶ عضو می‌باشد . یعنی :

$$S = \{(a, b) | a, b \in K\}$$

نمودار مختصات فضای نمونه این تجربه در زیر رسم شده‌است . نقطه e در شکل نشان می‌دهد که تاس قرمز يك و تاس سبز ۲ آمده‌است . همچنین نقطه g نشان می‌دهد که تاس قرمز ۶ و تاس سبز ۳ آمده‌است .



هرگاه هر کدام از نقطه‌های نمونه را به صورت (a, b) که در آن a عدد تاس قرمز

و b عدد تاس سبز است نشان دهیم پیشامدهای A و B که در شکل بامثلث مشخص شده‌اند ؛

به صورتهای زیر خواهند بود :

$$A = \{ (a, b) \mid a, b \in k \text{ و } a+b < 4 \}$$
$$B = \{ (a, b) \mid a, b \in k \text{ و } a+b > 8 \}$$

خلاصه - طبق آنچه دیدید می توان گفت :

الف - تجربه ای را که در هر بار انجام آن نتیجه بدست آمده یکی از چند صورت مختلف و معلوم بوده ولی قبل از انجام آن نتوان نتیجه حاصل را به طور قطع معلوم کرد به نام تجربه تصادفی خوانده می شود .

ب - مجموعه حاصل از تمام نتیجه های ممکن يك تجربه به نام فضای نمونه ای آن تجربه خوانده می شود .

ج - هر کدام از نتایج به دست آمده از يك تجربه ، يك عضو فضای نمونه است .

د - هر زیرمجموعه ای از فضای نمونه ای به نام يك پیشامد تصادفی خوانده می شود .

تمرین

۱- هريك از حروف كلمه «فردوسی» را روی يك کارت نوشته پس از مخلوط کردن کارت ها یکی از آنها را به طور قسره بر می داریم ؛ مطلوب است تعیین : الف - فضای نمونه ای این تجربه ، ب - پیشامد آن که روی کارت بیرون آمده حرف بی نقطه باشد .

۲- هريك از ارقام يك تا ۹ را روی يك کارت نوشته پس از مخلوط کردن کارت ها یکی از آنها را به طور قسره بر می داریم ؛ مطلوب است تعیین : الف - فضای نمونه ای تجربه . ب - پیشامد A ، که در آن عدد روی کارت کشیده شده کوچکتر از ۵ باشد . ج - پیشامد B ، که در آن عدد روی کارت بیرون آمده اول باشد . د - پیشامد E که در آن عدد روی کارت کشیده شده بزرگتر از ۵ باشد .

۳- يك سكه را دوبار می اندازیم ؛ فضای نمونه ای این تجربه و پیشامد آن را که سكه اقلان يك بار شیر بیاید بنویسید .

۴- يك سكه را سه بار می اندازیم ؛ فضای نمونه ای این تجربه و پیشامد آن را که اقلان يك بار شیر بیاید بنویسید .

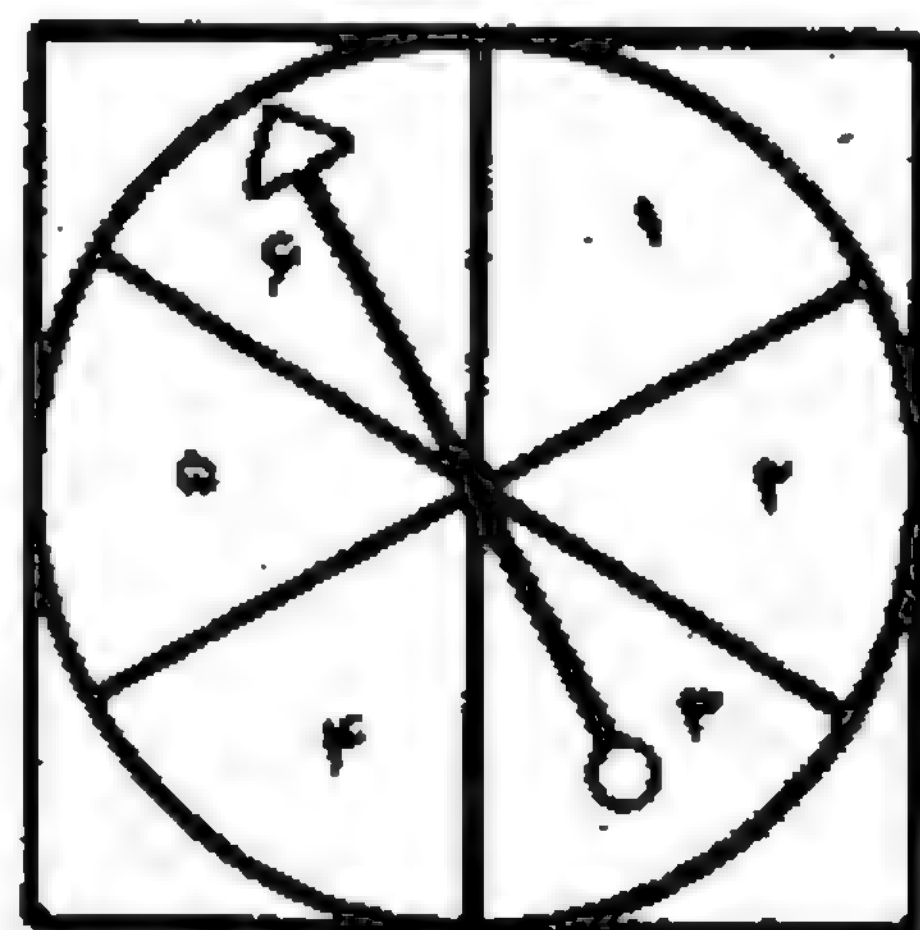
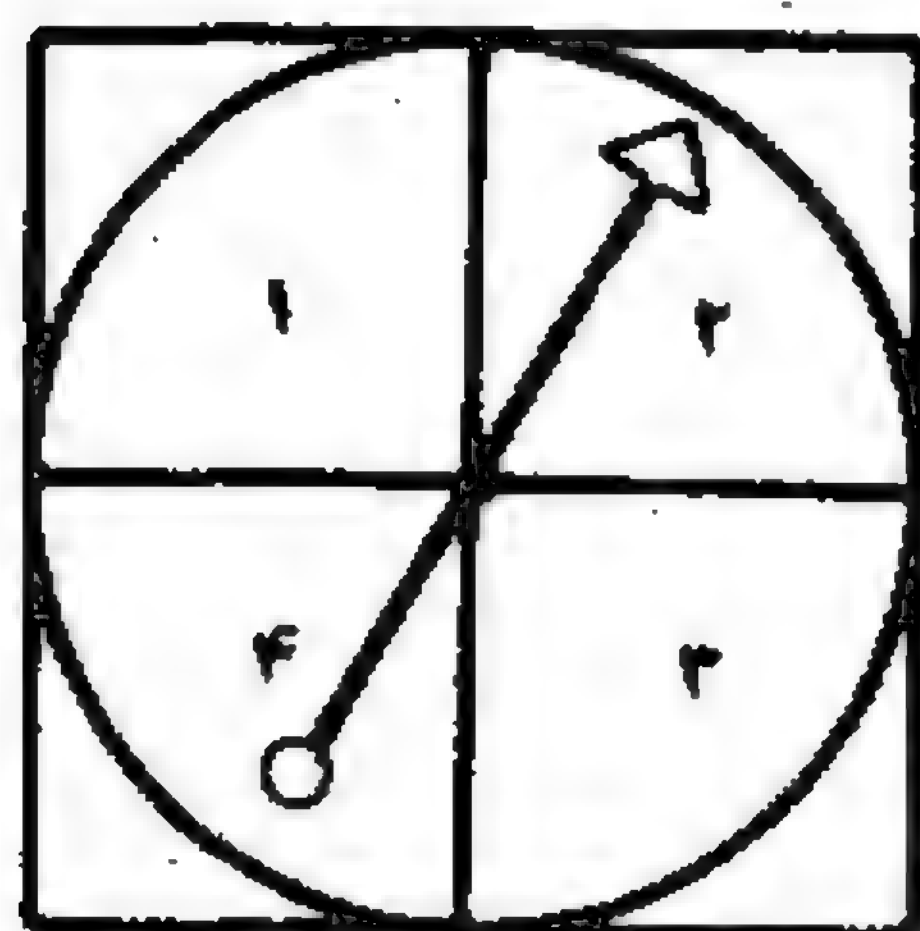
۵- يك تاس و يك سكه را به هوا می اندازیم ؛ فضای نمونه ای این تجربه و پیشامد آن را که سكه شیر یا تاس ۵ بیاید بنویسید .

۶- فضای نمونه ای $S = \{a, b, c\}$ مفروض است ؛ دو پیشامد مختلف این فضا را بنویسید . این فضای نمونه ای حداکثر دارای چند پیشامد است ؟

۷- يك کیسه محتوی ۱۵ مهره سیاه و ۱۰ مهره سفید است ؛ يك مهره را به طور تصادفی از داخل کیسه بیرون می آوریم ؛ این مهره مسلماً سفید (c) یا سیاه (m) خواهد بود . آیا

مجموعه $\{c, m\}$ می‌تواند نمایش فضای نمونه‌ای این تجربه باشد ؟ توضیح دهید .

۸- در دو دستگاه زیر ، عقربه‌ها را باهم به حرکت درمی‌آوریم ؛ مطلوب است :



الف- نمایش فضای نمونه‌ای

این تجربه با کمک نمودار مختصاتی .

ب- پیشامد A ، وقتی که

هر دو عقربه روی یک عدد متوقف شوند .

ج- پیشامد B ، وقتی که هر دو عقربه روی عدد زوج متوقف شوند .

احتمال

در قسمتهای قبل تعریف فضای نمونه‌ای و پیشامد تصادفی را دیدیم . اکنون می‌خواهیم بهر پیشامد تصادفی عددی نسبت دهیم و بوسیله آن شانس وقوع آن پیشامد را بسنجیم . در اینجا ، ساده‌ترین حالت را برای تعریف احتمال در نظر می‌گیریم . بدین ترتیب که اولاً فرض می‌کنیم که تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای متناهی بوده و این عضوها متمایز می‌باشند . ثانیاً شانس ظاهر شدن کلیه عضوهای فضای نمونه‌ای یکسان می‌باشد .

برای روشن شدن مطلب به مثالهای زیر توجه کنید :

۱- در پرتاب یک سکه سالم^۱ فضای نمونه‌ای عبارت است از

$$S = \{H, T\}$$

تعداد عضوهای این فضای نمونه متناهی بوده و برابر ۲ می‌باشد . از طرف دیگر این عضوها متمایز بوده و شانس واقع شدن عضوها باهم برابر است .

۲- در پرتاب یک تاس سالم یکبار فضای نمونه‌ای دارای شش عضو است :

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

و شانس واقع شدن هر یک از عضوها مساوی است .

۳- در پرتاب دو تاس باهم فضای نمونه‌ای دارای ۳۶ نقطه است . این فضای نمونه

عبارت است از :

$$S = \{(a, b) | a, b \in K\}$$

که در آن $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، شانس وقوع کلیه نقاط این فضای نمونه‌ای یکسان می‌باشد .

۱- سکه سالم سکه‌ای است که به هنگام پرتاب شانس شیر یا خط آمدن آن مساوی باشد.

در همه فضاهای نمونه‌ای بالا تعداد عضوهای این فضاهای نمونه‌ای متناهی بوده و این اعضوها متمایز می‌باشد و همچنین شانس واقع شدن کلیه اعضوها برابر است.

هر زیرمجموعه از این فضای نمونه‌ای يك پيشامد تصادفی می‌باشد. مثلاً در پرتاب سکه یکبار

$$A = \{H\}$$

يك پيشامد تصادفی است که عبارت از ظاهر شدن شیر می‌باشد. در پرتاب تاس یکبار

$$B = \{1, 3, 5\}$$

پیشامدی است که عبارت از ظاهر شدن عدد فرد است و بالاخره در پرتاب دو تاس باهم یکبار

$$C = \{(1, 1) \text{ و } (1, 2) \text{ و } (2, 1)\}$$

پیشامدی است که در آن مجموع شماره‌های ظاهر شده کمتر از ۴ می‌باشد.

اکنون که مفهوم فضای نمونه‌ای و پیشامدهای تصادفی روشن شد احتمال را تعریف

می‌کنیم.

تعریف - اگر عده‌ی عضوهای فضای نمونه‌ای متناهی بوده و شانس ظاهر شدن این اعضوها

مساوی باشد احتمال هر پیشامد تصادفی مانند A که با $P(A)$ نشان داده می‌شود برابر است با

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد عضوهای } A}{\text{تعداد عضوهای } S}$$

باتوجه به اینکه همواره $0 \leq n(A) \leq n(S)$ است همیشه $0 \leq P(A) \leq 1$ خواهد بود

یعنی هر پیشامد عددی است بین صفر و یک.

مثال ۱ - يك سکه را یکبار پرتاب می‌کنیم. اگر پیشامد A عبارت از ظاهر شدن شیر باشد

در اینصورت

$$S = \{H, T\} \text{ و } A = \{H\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

و بنابراین

$$= \frac{1}{2}$$

مثال ۲ - يك تاس را یکبار پرتاب می‌کنیم. اگر پیشامد B عبارت از ظاهر شدن عدد فرد

باشد داریم:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ و } B = \{1, 3, 5\}$$

بنابراین:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

مثال ۳ - دوتاس را یکبار باهم پرتاب می‌کنیم. اگر C پیشامدی باشد که در آن مجموع شماره‌های دوتاس کمتر از ۴ باشد خواهیم داشت :

$$S = \{(a, b) | a, b \in K\} \text{ و } K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

و

$$C = \{(1, 1) \text{ و } (1, 2) \text{ و } (2, 1)\}$$

پس :

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} \\ = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

مثال ۴ - سه سکه سالم باهم انداخته می‌شود. مطلوب است :

الف - احتمال آنکه هر سه سکه شیر بیاید.

ب - احتمال آنکه فقط یکی از سکه‌ها شیر بیاید.

حل - وقتی سه سکه باهم انداخته می‌شود فضای نمونه‌ای عبارت است از :

$$S = \{(H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (H, T, T), (T, H, H), (T, H, T), (T, T, H), (T, T, T)\}$$

الف - فرض کنید A پیشامد آمدن سه شیر باهم باشد، در اینصورت

$$A = \{(H, H, H)\}$$

و

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \\ = \frac{1}{8}$$

ب - اگر B پیشامد آمدن فقط یک شیر باشد، آنگاه داریم :

$$B = \{(H, T, T), (T, H, T), (T, T, H)\}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} \\ = \frac{3}{8}$$

و

مثال ۵ - تمام ترکیبات سه حرفی مجموعه $\{a, b, c, d\}$ را روی کارتهای مختلف

نوشته (هر ترکیب روی یک کارت) پس از مخلوط کردن، یک کارت را به طور قرعه برمی‌داریم؛

احتمال آن که حرف b روی این کارت باشد چیست ؟

حل : ترکیبات سه حرفی مجموعه $\{a, b, c, d\}$ ، طبق آنچه گفته شد برابر است با :

$$S = \{abc, acd, abd, bcd\}$$

هرگاه A پیشامد مطلوب باشد داریم :

$$A = \{abc, abd, bcd\}$$

در نتیجه احتمال آن برابر است با :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

مثال ۶- يك كيسه محتوی ۵ مهره قرمز ، ۳ مهره سیاه و ۲ مهره سفید است .

يك مهره را بطور تصادفی از كيسه بیرون می آوریم .

الف - فضای نمونه ای این تجربه را بنویسید .

ب - پیدا کنید احتمال اینکه این مهره قرمز باشد .

ج - میدانیم که مهره انتخاب شده قرمز است . بدون آنکه این مهره را به كيسه برگردانیم

مهره دیگری را به طور تصادفی از كيسه بیرون می آوریم . پیدا کنید احتمال اینکه این مهره نیز قرمز باشد .

حل : الف - واضح است که مهره بیرون آمده از نظر رنگ ، قرمز (g) ، سیاه (m) یا

سفید (c) می باشد ، و حال آن که نتیجه ممکن تجربه بیرون آمدن یکی از مهره های داخل

كيسه است . به عبارت دیگر در اینجا مجموعه $\{g, m, c\}$ فضای نمونه ای نبوده بلکه برای

تعیین فضای نمونه ای تجربه باید ابتدا مهره های هم رنگ را با استفاده از زیر نویس متمایز نمود

(مثلاً ۲ مهره سفید را با c_1 و c_2 نشان داد) ، باین قرارداد فضای نمونه ای تجربه برابر

است با :

$$S = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, m_1, m_2, m_3, c_1, c_2\}$$

ب - هرگاه A نمایش پیشامد آن باشد که مهره بیرون آمده قرمز است ، خواهیم داشت :

$$A = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$$

در نتیجه احتمال A برابر است با :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

یعنی احتمال آن که مهره بیرون آمده قرمز باشد برابر است با تعداد مهره های قرمز در

كيسه تقسیم بر تعداد کل مهره ها .

ج - هرگاه مهره قرمز به كيسه برگردانده نشود ، فضای نمونه ای تجربه تغییر کرده و

فضای نمونه ای جدید برابر می شود با :

$$S_1 = \{g'_1, g'_2, g'_3, g'_4, m_1, m_2, m_3, c_1, c_2\}$$

که در آن g'_1, g'_2, g'_3 و g'_4 مهره‌های قرمز باقیمانده می‌باشند.
هر گاه B نمایش پیشامد آن باشد که مهره بیرون آمده قرمز باشد، خواهیم داشت:

$$B = \{g'_1, g'_2, g'_3, g'_4\}$$

در نتیجه احتمال B برابر است با

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S_1)} = \frac{4}{9}$$

مثال ۷- يك كيسه محتوی ۴ مهره آبی و ۵ مهره قرمز است؛ دو مهره به طور تصادفی از كيسه بیرون آورده می‌شود؛ مطلوب است احتمال آن که هر دو مهره آبی باشد.
در اینجا ما می‌خواهیم دو مهره آبی را از میان ۴ مهره آبی انتخاب کنیم؛ پس تعداد انتخابها برابر است با $\binom{4}{2}$. از طرفی تعداد نقاط فضای نمونه‌ای تجربه برابر است با تعداد ترکیبهای ۲ مهره از ۹ مهره: $\binom{9}{2}$ ؛ پس احتمال آن که هر دو مهره آبی باشد برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{\frac{4!}{2!2!}}{\frac{9!}{2!7!}} = \frac{4 \times 3}{9 \times 8} = \frac{1}{6}$$

مثال ۸- از میان ۲۲ نفر دانش‌آموز قرار است ۸ نفر برای تشکیل انجمن ورزش‌دیرستان انتخاب شوند؛ هر گاه ۱۰ نفر از این دانش‌آموزان سال اول و ۱۳ نفر دیگر سال دوم باشند، مطلوب است احتمال آن که ۴ نفر از سال اول و ۴ نفر از سال دوم انتخاب شوند.

حل: در اینجا تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای برابر است با $\binom{22}{8}$ و عده عضوهای پیشامد مطلوب طبق اصل شمارش برابر $\binom{12}{4} \times \binom{10}{4}$ می‌باشد؛ در نتیجه احتمال خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\binom{10}{4} \times \binom{12}{4}}{\binom{22}{8}}$$

پیشامد یقین، پیشامد نشدنی

گفتیم که هر زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه S يك پیشامد است؛ بنابراین S و \emptyset نیز دو پیشامد می‌باشند؛ S به نام پیشامد یقین خوانده می‌شود و احتمال آن برابر يك است:

$$P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

\emptyset را پیشامد نشدنی می‌خوانند و احتمال آن برابر است با :

$$P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$$

متمم پیشامد A

هرگاه A زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای S باشد ، چون A مجموعه است متمم آن مجموعه A' خواهد بود . در احتمالات

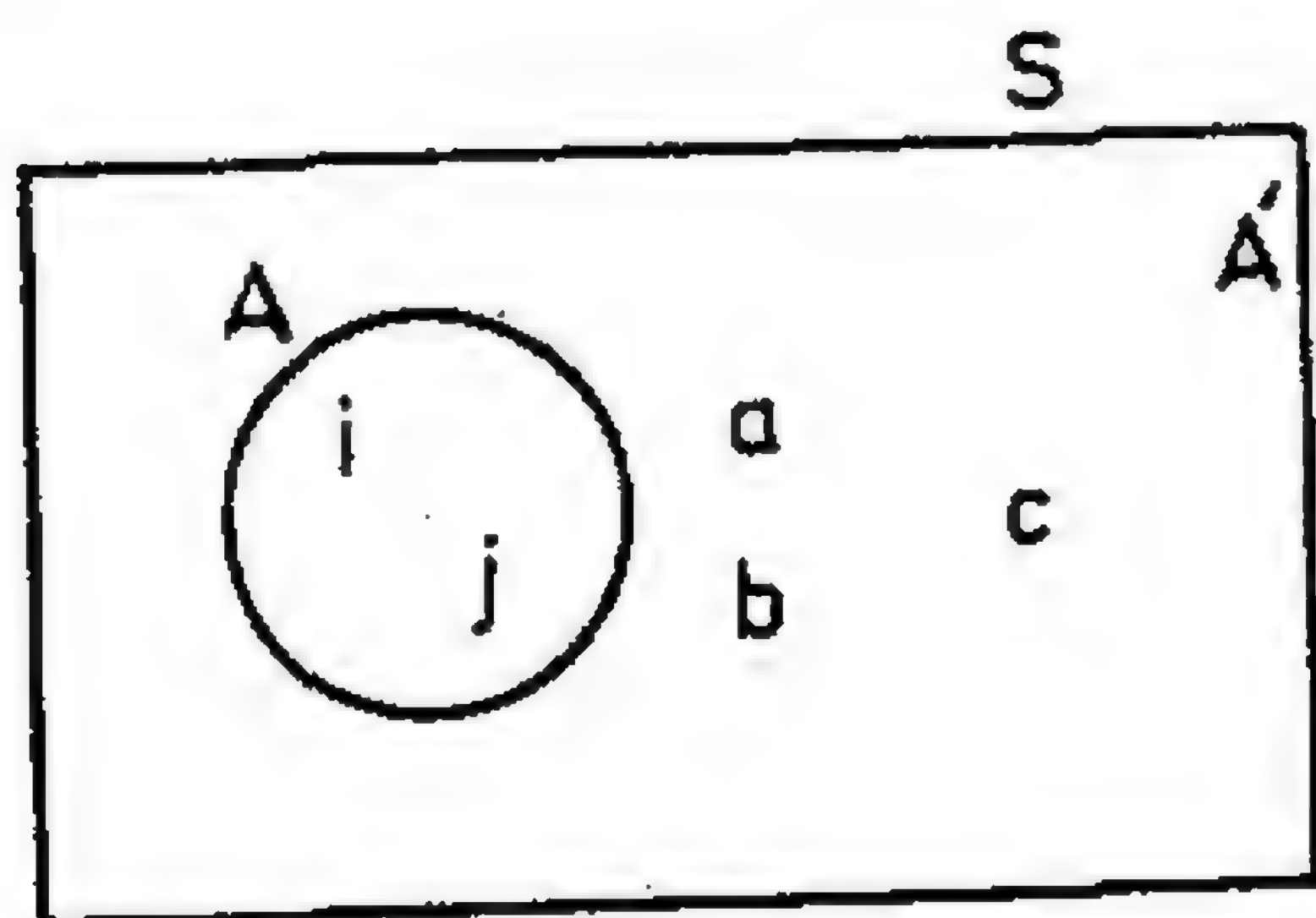
اگر A پیشامد مفروضی باشد A' به مفهوم آن است که A واقع نخواهد شد .

مثال - هریک از حروف a, b, c, i, j

را روی یک کارت نوشته پس از مخلوط کردن آنها ، یک کارت را به طور قرعه

برمی‌داریم ؛ مطلوب است تعیین : الف - احتمال آن که روی این کارت حرف نقطه دار باشد
ب - احتمال آن که روی این کارت حرف نقطه دار نباشد .

حل : هرگاه S فضای نمونه‌ای و A پیشامد بیرون آمدن حرف نقطه‌دار باشد ، خواهیم داشت :



$$S = \{ a, b, c, i, j \}$$

$$A = \{ i, j \}$$

الف - احتمال پیشامد A برابر است با :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{5}$$

ب - احتمال آن که A واقع نشود (A' واقع شود) برابر است با :

$$A' = \{ a, b, c \}$$

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{3}{5}$$

در این مثال داریم :

$$P(A) + P(A') = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

این مطلب در حالت کلی نیز درست می‌باشد . یعنی هرگاه A و A' به ترتیب پیشامد

مفروض و متمم آن باشد خواهیم داشت :

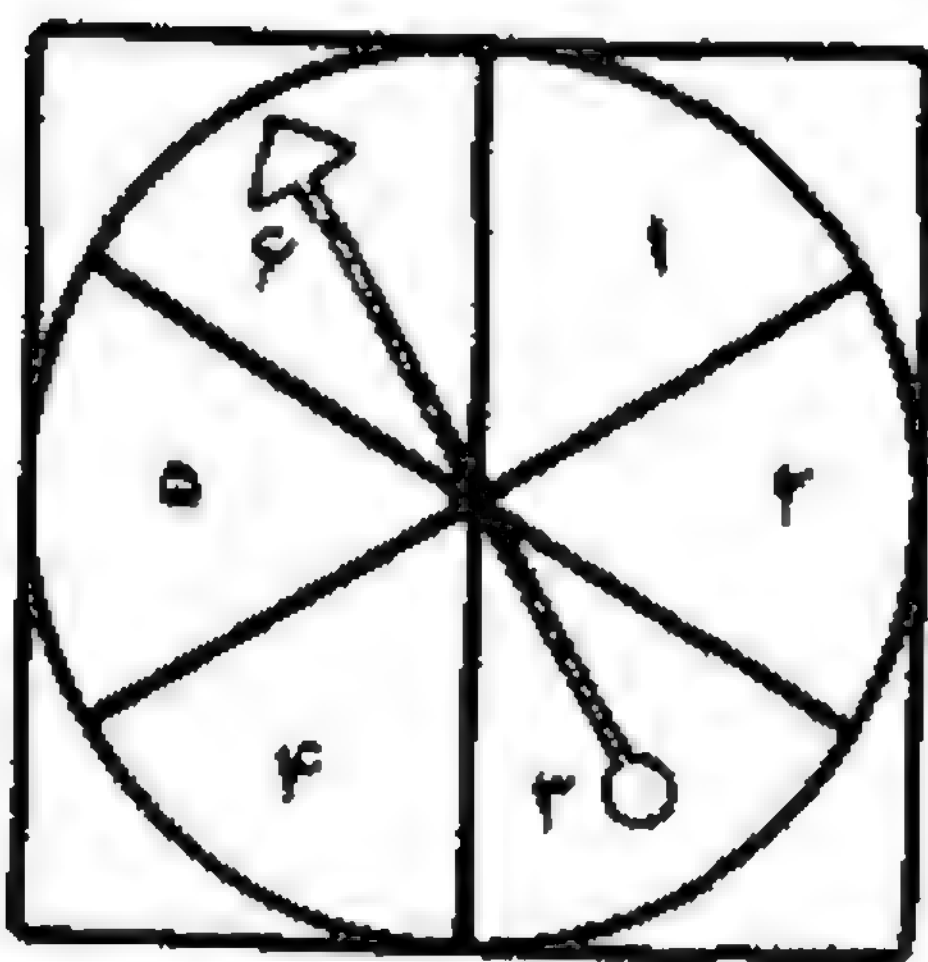
$$P(A) + P(A') = 1$$

$$P(A) = 1 - P(A')$$

و یا :

تمرین

۱- در دستگاه زیر عقربه را به حرکت درمی آوریم؛ در صورتی که احتمال توقف عقربه در هر قسمت مساوی باشد، مطلوب است محاسبه احتمال آن که :



الف - عقربه در ناحیه ای که با عدد ۴ مشخص شده است

توقف کند .

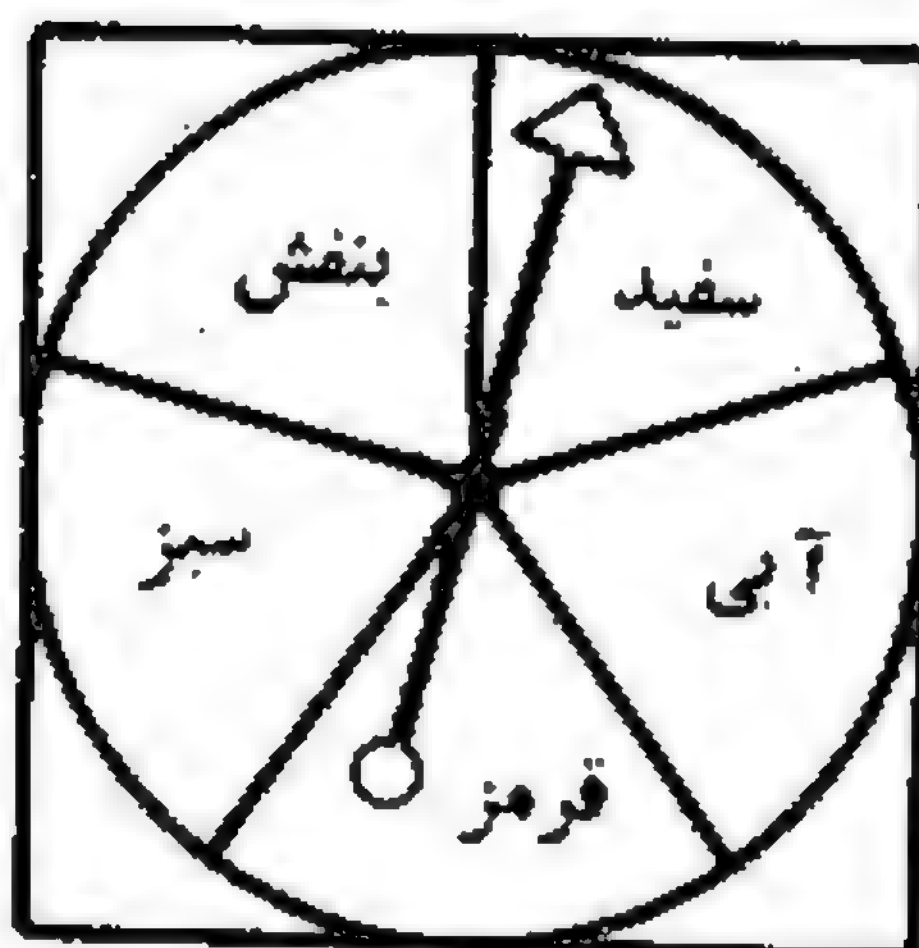
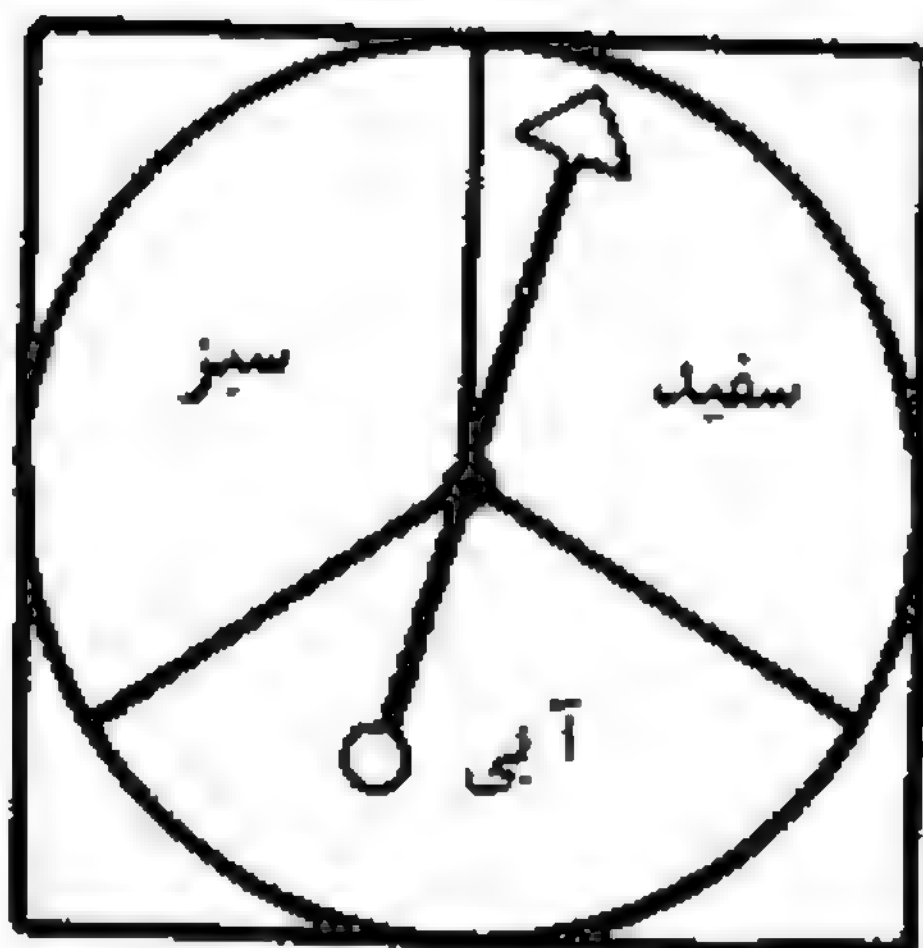
ب - عقربه در قسمتهایی که با اعداد زوج مشخص

شده اند توقف کند .

ج - عقربه در قسمتهایی که با اعداد فرد مشخص شده اند

توقف کند .

۲- در دستگاههای زیر دو عقربه را با هم می چرخانیم؛ در صورتی که در هر دستگاه احتمال توقف عقربه در هر قسمت مساوی باشد مطلوب است:



الف - احتمال آن که اقلا

يك عقربه در قسمت آبی توقف کند.

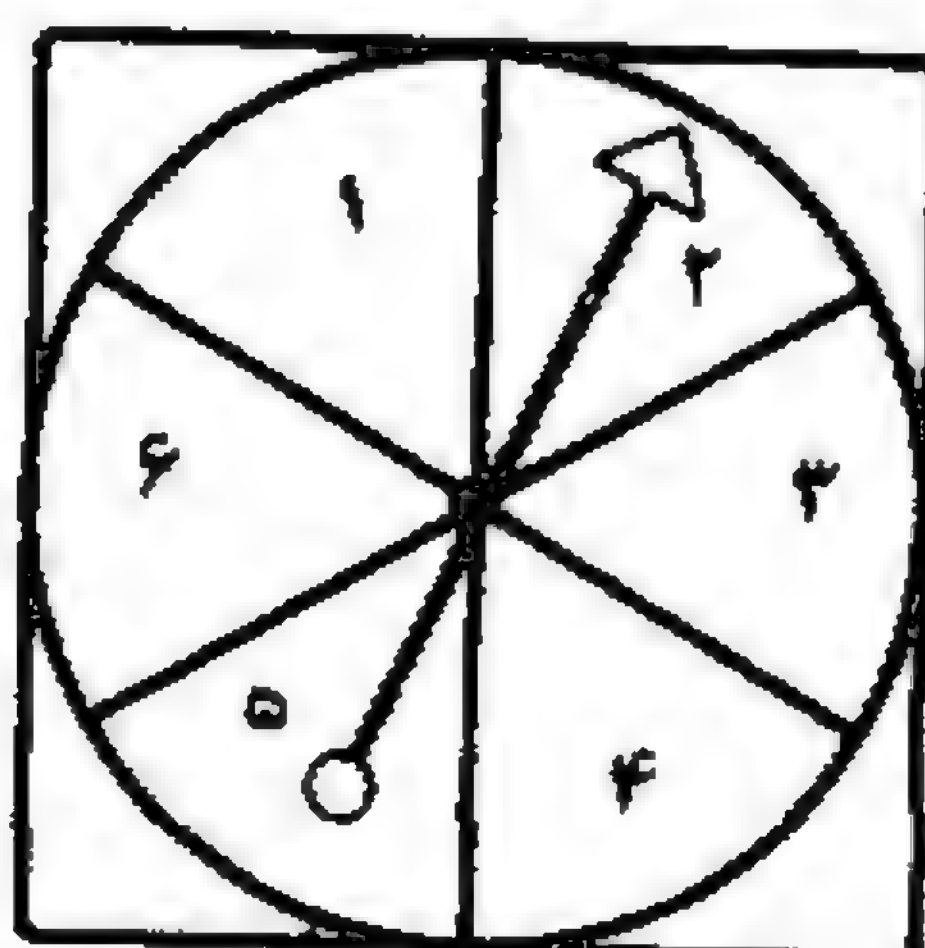
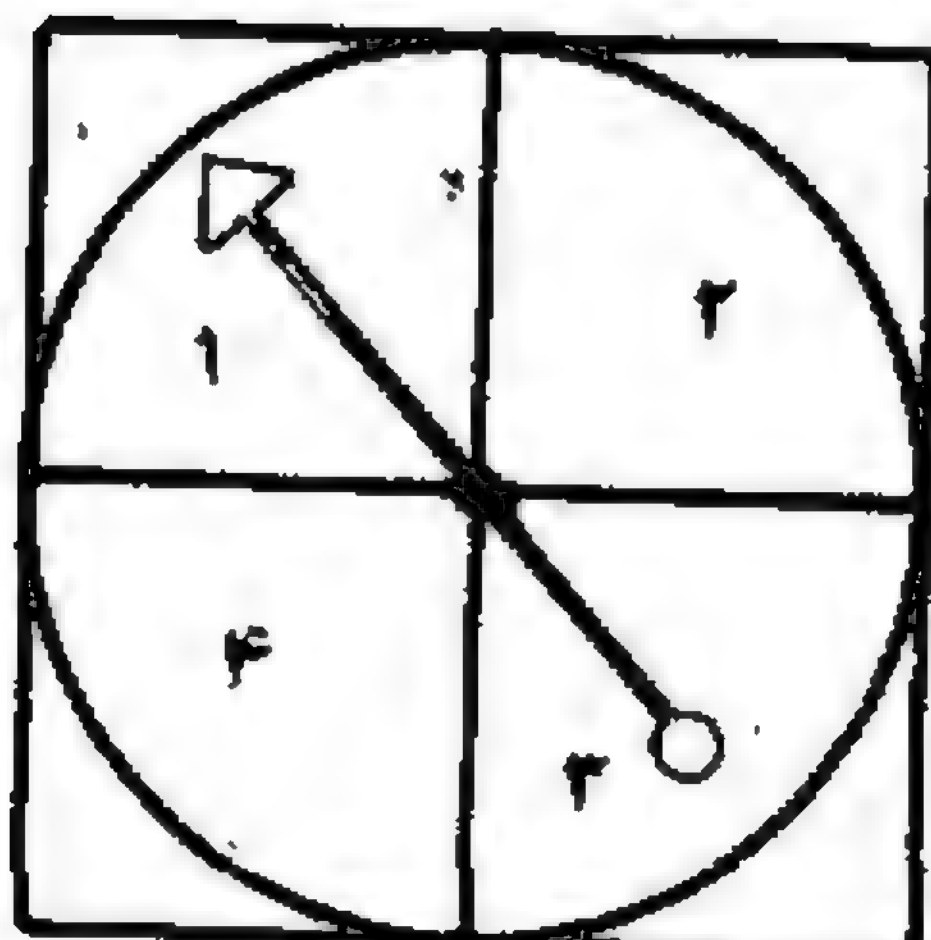
ب - احتمال آن که فقط يك

عقربه در قسمت سفید توقف کند .

ج - احتمال آن که هر دو

عقربه در قسمت سبز توقف کنند .

۳- در دستگاههای زیر دو عقربه را با هم می چرخانیم، در صورتی که در هر دستگاه احتمال توقف عقربه در هر قسمت مساوی باشد مطلوب است :



الف - احتمال آن که هر دو

عقربه در قسمتهایی که با اعداد

اول مشخص شده اند توقف کنند .

ب - احتمال آن که هر دو

عقربه در قسمتهایی که با اعداد

زوج مشخص شده اند توقف کنند.

۴ - يك سكه دوربالي سه بار متوالي به هوا انداخته می شود ؛ مطلوب است :
الف - احتمال آن که اقلا يك بار خط داشته باشیم . ب - احتمال آن که هر سه بار سكه خط
بیاید . ج - احتمال آن که اقلا دوبار سكه خط بیاید .

۵ - دو تاس باهم ریخته می شود ؛ مطلوب است :
الف - احتمال A ، هرگاه A پیشامد آن باشد که مجموع اعداد تاس پس از نشستن
۷ باشد .

ب - احتمال B ، هرگاه B پیشامد آن باشد که هر دو تاس با عدد زوج رو شوند .
ج - احتمال C ، هرگاه C پیشامد آن باشد که مجموع اعداد تاسها پس از نشستن کمتر
از ۷ باشد .

۶ - هريك از ترکیبات $\binom{5}{3}$ مجموعه $\{a, b, c, d, e\}$ را روی يك کارت نوشته
پس از مخلوط کردن کارتها يك کارت را به طور تصادفی برمی داریم ؛ مطلوب است احتمال آن
که حرف a یکی از حروف این کارت باشد .

۷ - يك کیسه محتوی ۳ مهره قرمز ، يك مهره سیاه و دو مهره سفید است . يك مهره را
به طور تصادفی از کیسه بیرون می آوریم ؛ مطلوب است : الف - احتمال آن که این مهره قرمز باشد .
ب - این مهره را به کیسه برگردانده مهره دیگری بیرون می آوریم ؛ احتمال آن که این مهره
سفید باشد . ج - مهره دوم را به کیسه برگردانده ۳ مهره را بیرون می آوریم ؛ احتمال آن که هر سه
مهره قرمز باشد .

۸ - يك عدد را به طور تصادفی از میان اولین ۱۰ عدد زوج مثبت انتخاب می کنیم ؛
احتمال آن که عدد انتخاب شده مضرب ۳ و ۴ نباشد چیست ؟

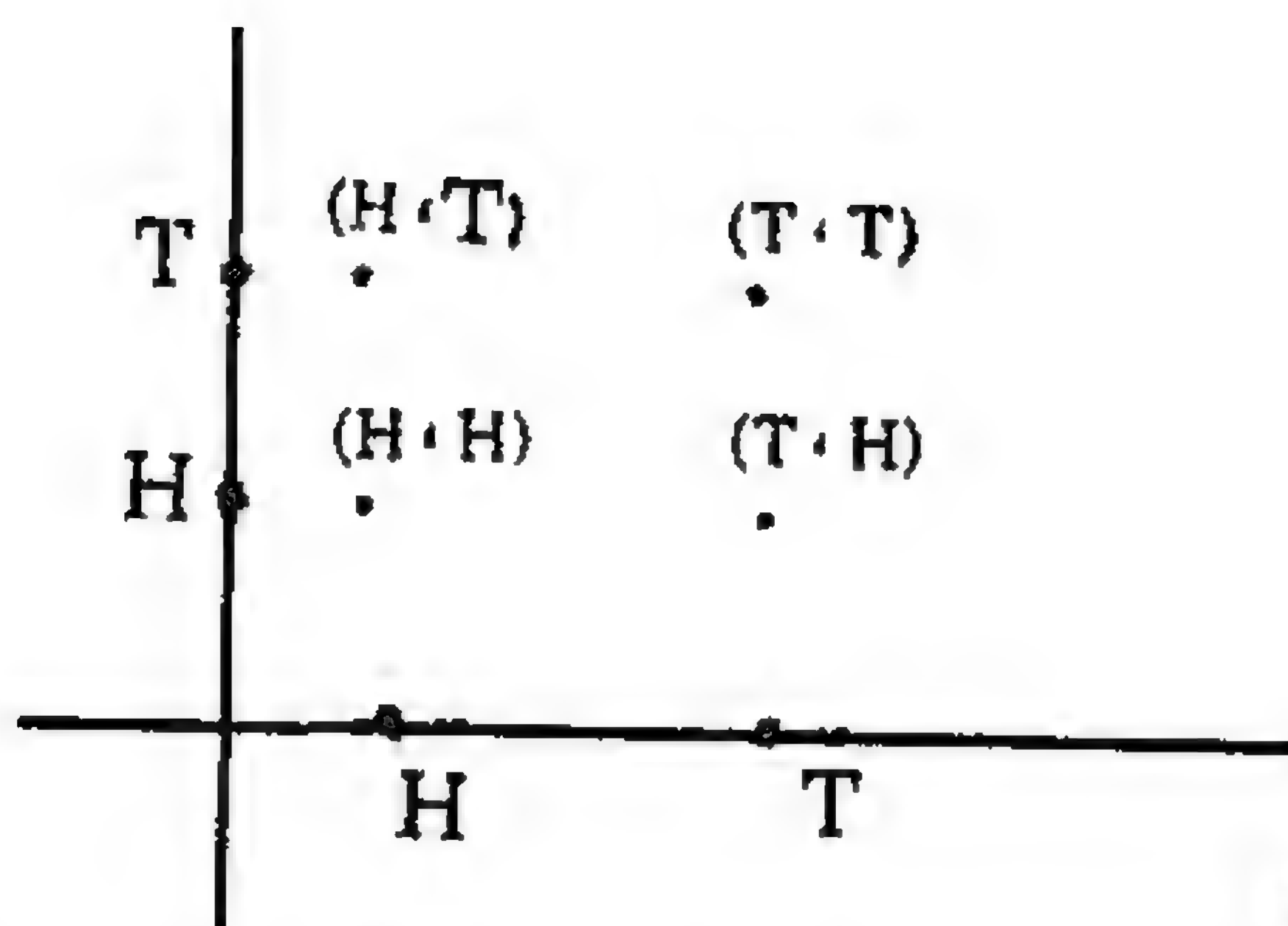
۹ - يك کیسه محتوی ۱۵ مهره سیاه ، ۱۰ مهره سفید و ۵ مهره آبی است ؛ يك مهره را
به طور تصادفی از کیسه بیرون می آوریم ؛ مطلوب است : الف - احتمال آن که این مهره آبی
باشد . ب - احتمال آن که این مهره آبی نباشد . ج - این مهره را به کیسه برگردانده ۲ مهره
را به طور تصادفی بیرون می آوریم ؛ احتمال آن که يك مهره سیاه و يك مهره سفید باشد .

۱۰ - يك تاس و يك سكه باهم انداخته می شوند ، مطلوب است : الف - احتمال آن که
تاس عدد زوج یا سكه شیر بیاید . ب - احتمال آن که تاس عدد زوج و سكه شیر بیاید .

قوانین احتمال

دو سكه باهم به هوا انداخته می شود ، مطلوب است :

الف - احتمال آن که هر دو شیر یا هر دو خط بیاید .



ب - احتمال آن که اقلا

يك شير يا اقلا يك خط بيايد .

همان طور كه قبلا ديديد ،

فضای نمونه‌ای در این تجربه

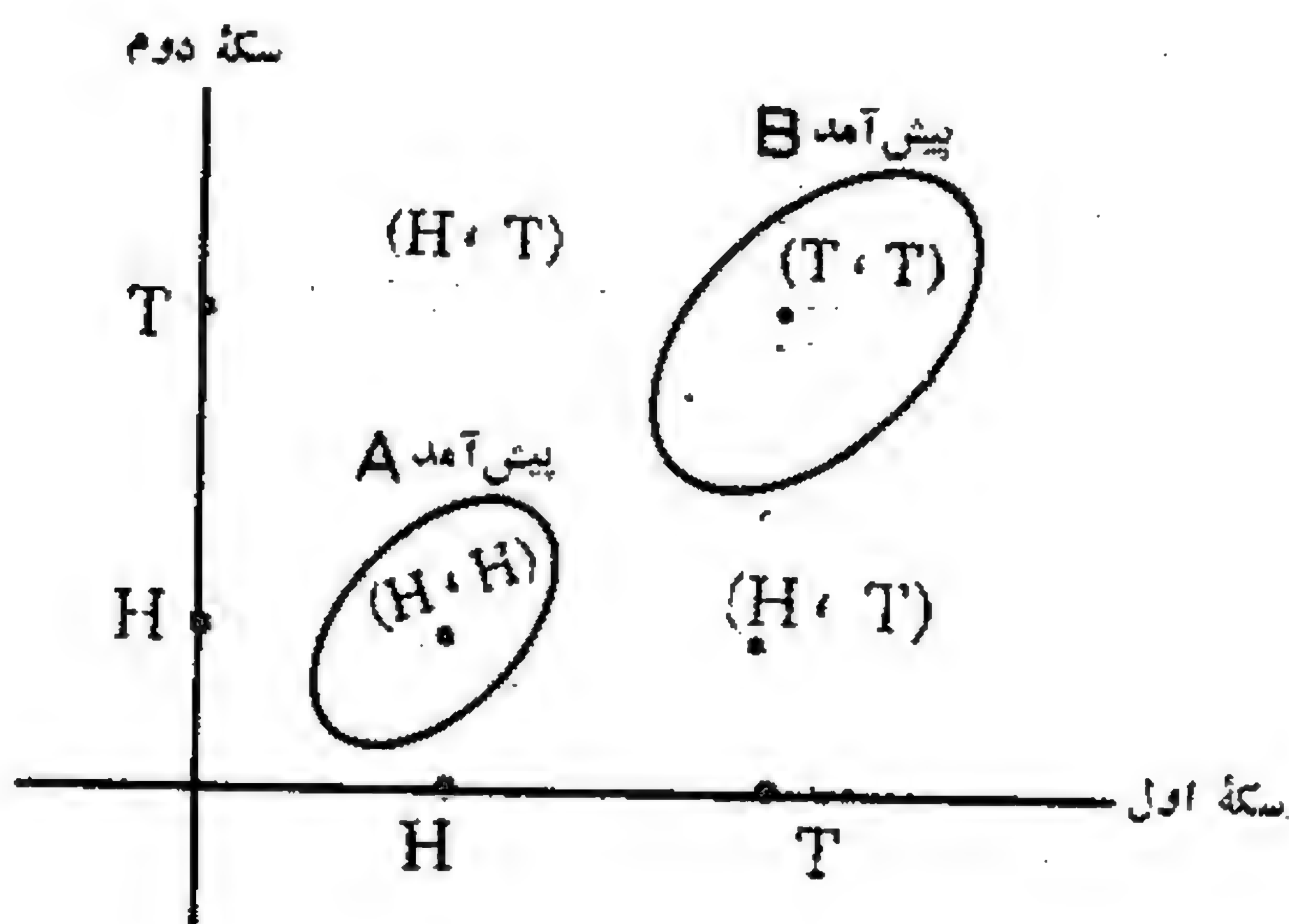
برابر است با :

$$S = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$$

الف - هرگاه A پيشامد هردو سكه شير و B پيشامد هردو سكه خط باشد ، خواهيم

داشت :

$$A = \{(H,H)\} , B = \{(T,T)\}$$



چون هر پيشامد مجموعه‌است ، لذا كلمه « يا » در اینجا مفهوم « يا » در مجموعه‌ها را داشته و

پيشامد آن كه هردو سكه شير يا هر

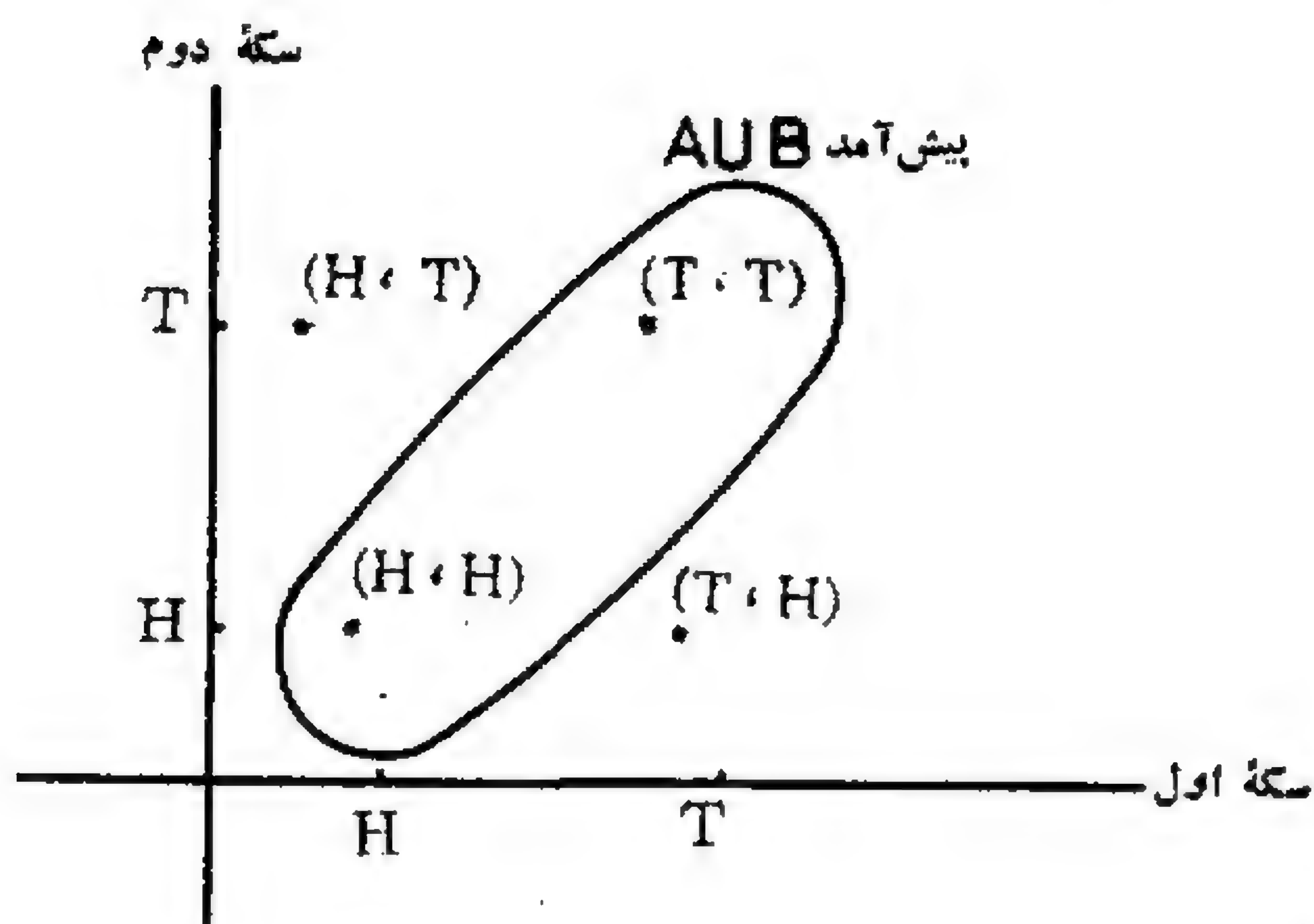
دو خط باشد ، برابر است با :

$$A \cup B = \{(H,H)\} \cup \{(T,T)\}$$

$$= \{(H,H), (T,T)\}$$

و احتمال آنها به ترتيب برابر

است با :



$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{2}{4}$$

در اینجا دیده می شود که :

$$P(A \cup B) = \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

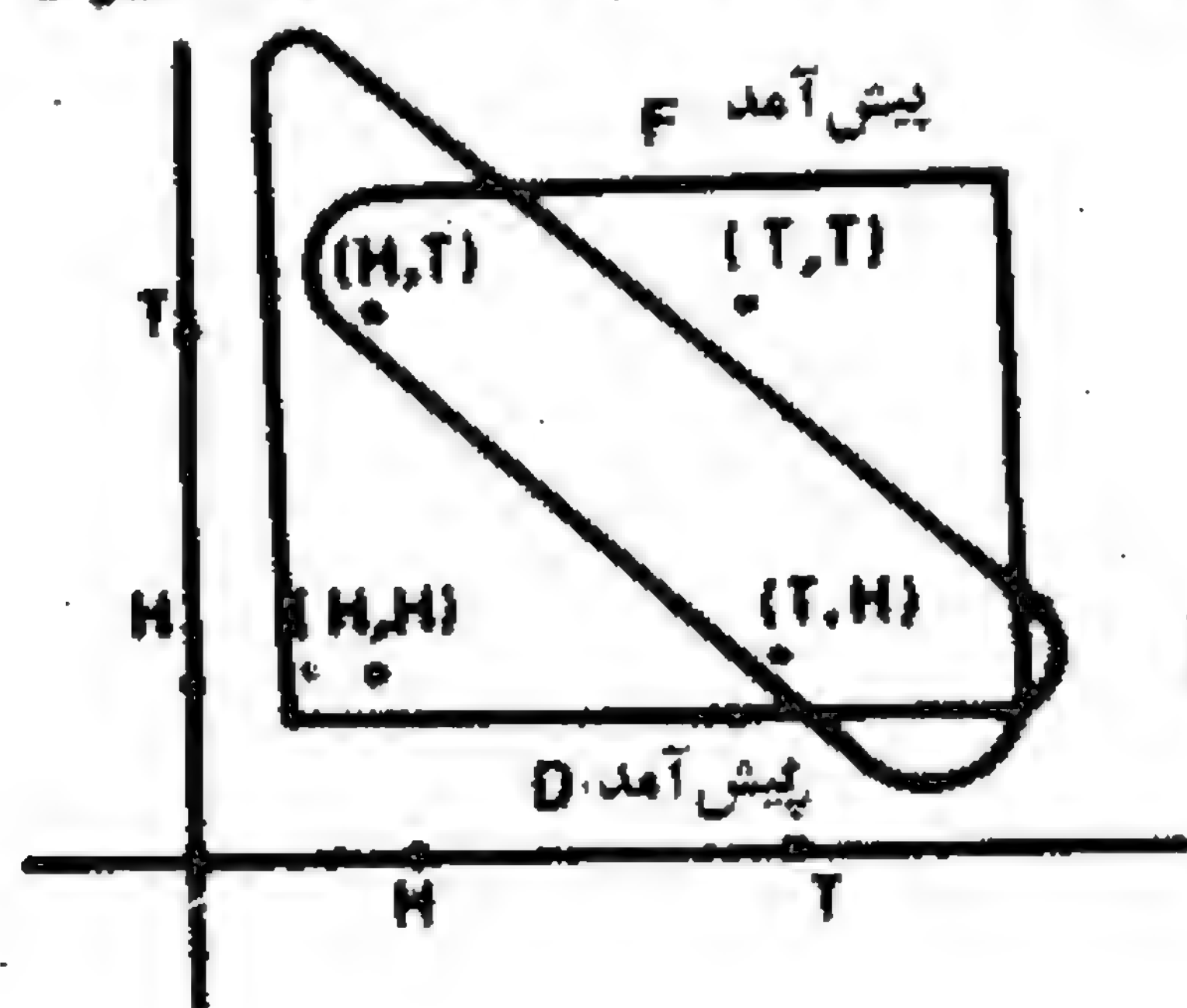
$$= P(A) + P(B)$$

به عبارت دیگر ، برای این تجربه داریم :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

آیا این تساوی همیشه درست است ؟ برای جواب به این سؤال به قسمت « ب » توجه کنید .

ب - در این تجربه ، پیشامدهای اقلای یک شیر ، اقلای یک خط و اقلای یک شیر یا اقلای یک خط به ترتیب برابر است با :



$$D = \{(H,H), (H,T), (T,H)\}$$

$$F = \{(H,T), (T,H), (T,T)\}$$

$$D \cup F = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$$

در نتیجه احتمال آنها برابر است با :

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

$$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

$$P(D \cup F) = \frac{n(D \cup F)}{n(S)} = \frac{4}{4}$$

در اینجا دیده می شود که :

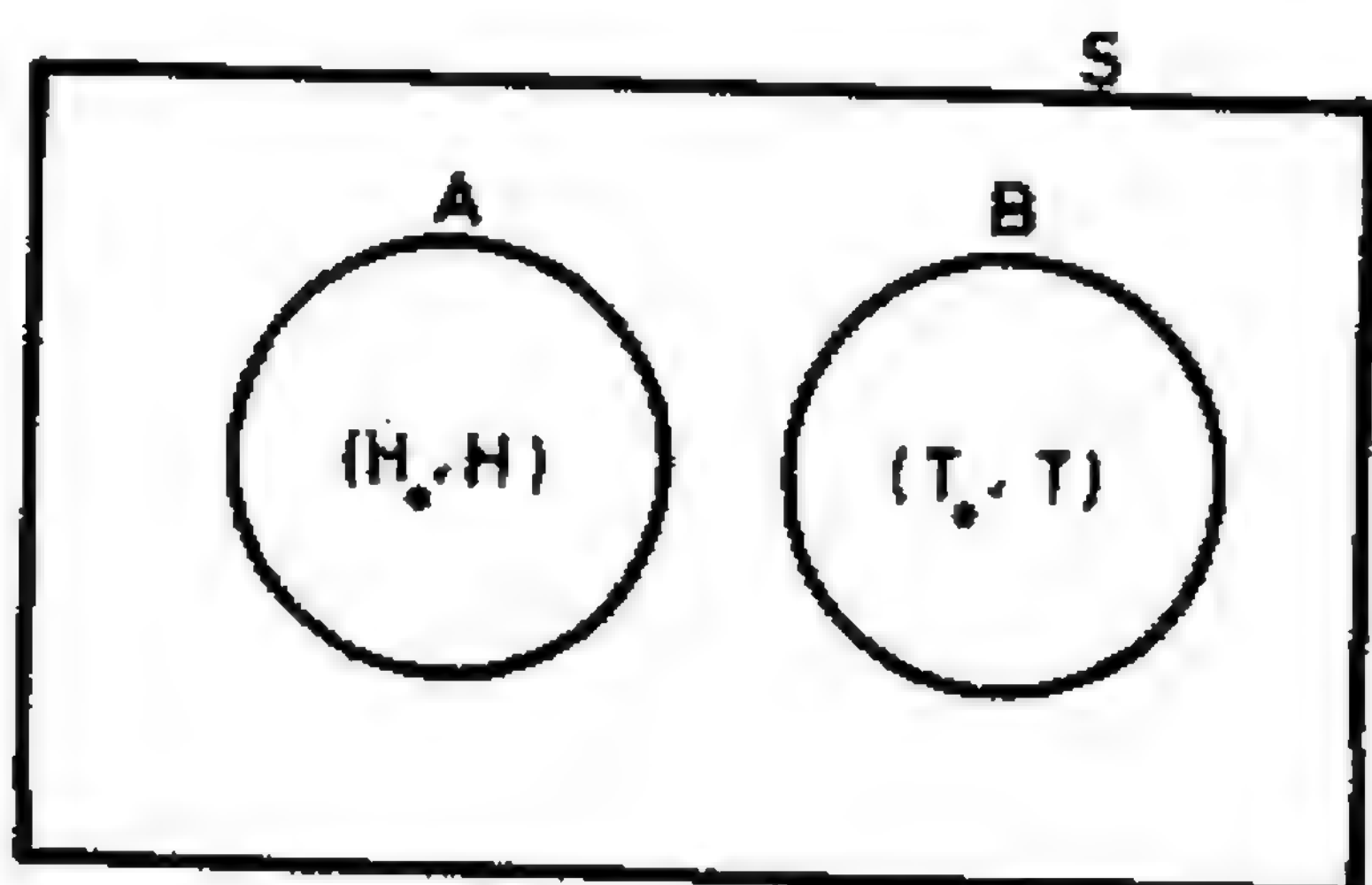
$$\frac{4}{4} \neq \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$$

$$P(D \cup F) \neq P(D) + P(F)$$

چرا در قسمت « الف » تساوی برقرار و در قسمت « ب » برقرار نیست ؟ جواب این

است که در قسمت « الف » دو پیشامد A و B عضو مشترکی ندارند یعنی : $A \cap B = \emptyset$.

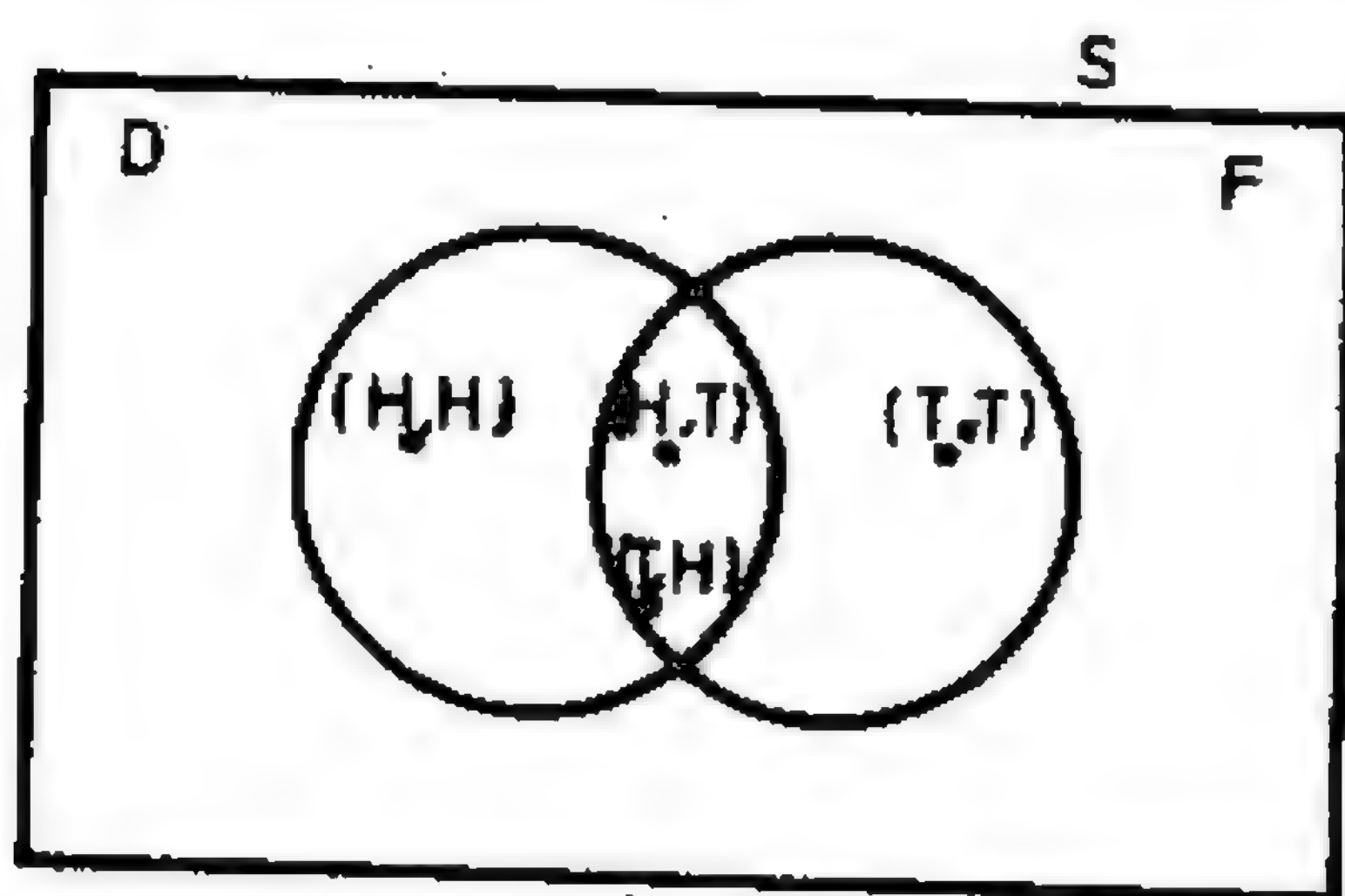
تعریف - دو پیشامد A و B که عضو مشترکی نداشته باشند (یعنی $A \cap B = \emptyset$) به نام دو



پیشامد ناسازگار خوانده می شود .
هرگاه A و B دو پیشامد ناسازگار باشند ، داریم :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (1)$$

در قسمت « ب » دو پیشامد D و F عضو مشترك دارند :



$$D \cap F = \{(H, T), (T, H)\} \neq \emptyset$$

اگر دو پیشامد A و B را داشته باشیم احتمال پیشامد $A \cup B$ بوسیله رابطه زیر بدست می آید

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (2)$$

واضح است که اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند $P(A \cap B) = 0$ است زیرا $A \cap B$ يك پیشامد نشدنی است . در اینصورت رابطه (۲) به رابطه (۱) تبدیل می گردد .
تساویهای (۱) و (۲) را می توان با استفاده از تعریف احتمال ثابت کرد .

اگر $A \cap B \neq \emptyset$ ، طبق آنچه در مجموعه ها دیدید داریم :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

هرگاه طرفین این تساوی را بر $n(S)$ تقسیم کنیم ، خواهیم داشت :

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

که طبق آنچه راجع به احتمال يك پیشامد گفته شد ، حاصل می شود :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

اگر $A \cap B = \emptyset$ ، آن گاه $P(A \cap B) = 0$ و از آنجا به دست می آید :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال ۱ - يك کیسه محتوی ۵ مهره قرمز ، ۳ مهره سفید و ۳ مهره مشکی است ؛ يك مهره را به طور تصادفی از داخل کیسه بیرون می آوریم ؛ احتمال آن که این مهره قرمز یا سفید باشد چیست ؟

حل : هرگاه مهره‌های قرمز ، سفید و مشکی را به ترتیب با g ، c و m نشان داده برای

تمایز مهره‌های هم‌رنگ از اندیس استفاده کنیم ، فضای نمونه تجربه برابر خواهد شد با :

$$S = \{ g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, c_1, c_2, c_3, m_1, m_2, m_3 \}$$

همچنین اگر A پیشامد آن که مهره بیرون آمده قرمز و B پیشامد آن که مهره سفید

باشد ، داریم :

$$A = \{ g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 \} ; B = \{ c_1, c_2, c_3 \}$$

در اینجا $A \cap B = \emptyset$ یعنی A و B ناسازگار هستند ، پس می‌نویسیم :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} \\ &= \frac{5}{11} + \frac{3}{11} = \frac{8}{11} \end{aligned}$$

مثال ۷ - عددی به طور تصادفی از فضای نمونه‌ای :

$$S = \{ 1, 2, 3, \dots, 9 \}$$

انتخاب می‌شود ، هرگاه احتمال عضوها مساوی باشند ، احتمال آن که عدد انتخاب شده کمتر از

۴ یا فرد باشد چیست ؟

حل : هرگاه پیشامدهای « عدد انتخاب شده کوچکتر از ۴ است » و « عدد انتخاب شده

فرد است » را به ترتیب با A و B نمایش دهیم ، خواهیم داشت :

$$A = \{ 1, 2, 3 \} , B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$$

در این صورت پیشامد مطلوب یعنی « عدد انتخاب شده کمتر از ۴ یا فرد باشد » برابر

است یا :

$$A \cup B = \{ 1, 2, 3 \} \cup \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$$

$$= \{ 1, 2, 3, 5, 7, 9 \}$$

$$A \cap B = \{ 1, 2, 3 \} \cap \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$$

$$= \{ 1, 3 \} \neq \emptyset$$

پس خواهیم داشت :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$= \frac{3}{9} + \frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{2}{3}$$

مستقل بودن دو پیشامد

مثال ۱ - يك سكه دوبار انداخته می شود ؛ احتمال این كه سكه در هر دو بار شیر بیاید چیست ؟

تجربه دوبار انداختن يك سكه نظیر تجربه دوسكه باهم انداختن است ؛ لذا فضای نمونه در این تجربه برابر می شود با :

$$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

هرگاه A و B به ترتیب پیشامدهای « شیر آمدن در پرتاب اول » و « شیر آمدن در پرتاب دوم » باشند ، داریم :

$$A = \{(H, H), (H, T)\} ; B = \{(H, H), (T, H)\}$$

در نتیجه ، پیشامد « سكه در پرتاب اول شیر » و « در پرتاب دوم نیز شیر » بیاید برابر است با :

$$A \cap B = \{(H, H)\}$$

و احتمال آن برابر می شود با :

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

از طرفی احتمال شیر آمدن سكه در هر کدام از پرتابها برابر $\frac{1}{2}$ است ، پس می توان نوشت :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= P(A) \times P(B) \end{aligned}$$

به عبارت دیگر ، برای این مثال داریم :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

آیا این تساوی همیشه درست است ؟ برای پاسخ به مثال زیر توجه کنید :

مثال ۲ - دو تاس را با هم یکبار پرتاب می کنیم . هرگاه پیشامد A عبارت از ظاهر شدن عدد ۱ روی تاس اول و پیشامد B آمدن مجموع دو تاس برابر ۳ باشد داریم :

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\}$$

$$B = \{(1,2), (2,1)\}$$

$$A \cap B = \{(1,2)\}$$

و

با توجه به اینکه فضای نمونه‌ای دارای ۳۶ عضو است احتمال پیشامدهای بالا برابر است با؛

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{6} \times \frac{1}{18}$$

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \quad \text{بنابراین:}$$

چرا در مثال اول: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ولی در مثال دوم:

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \text{؟}$$

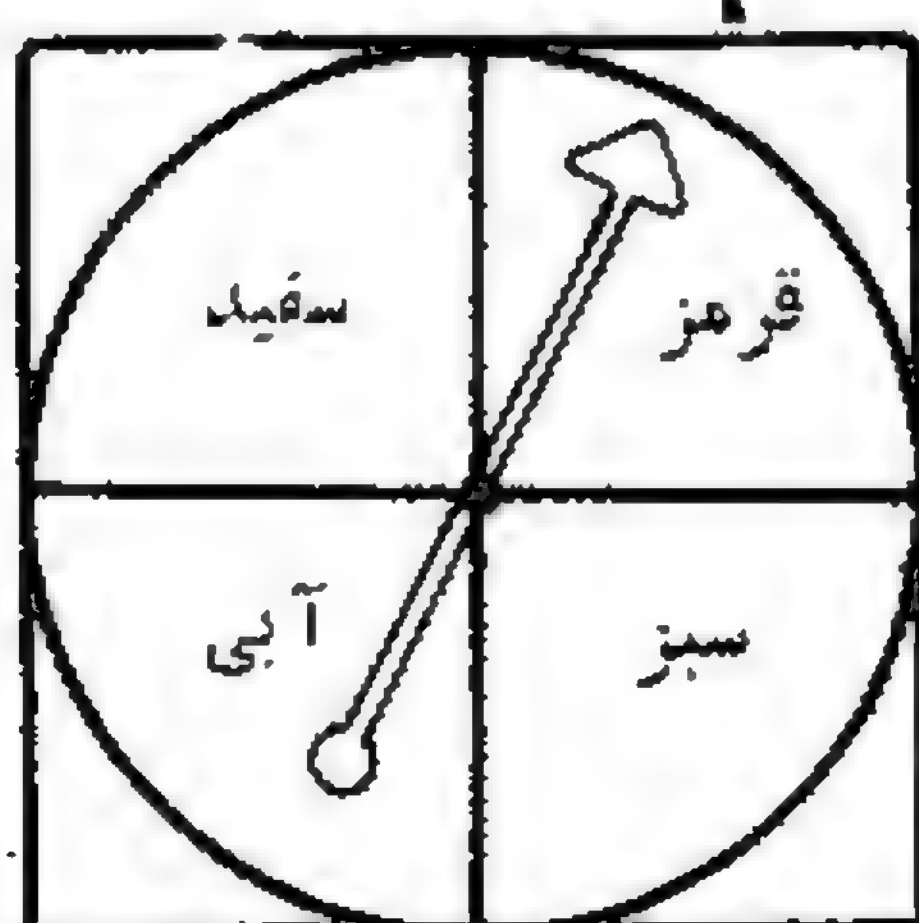
جواب این است که در مثال اول شیر آمدن سکه دوم به هیچ وجه بستگی به شیر آمدن سکه اول ندارد؛ به عبارت دیگر، پیشامد اول روی پیشامد دوم تأثیر نمی‌گذارد؛ چنین پیشامدهایی را مستقل می‌خوانند.

تعریف - دو پیشامد A و B مستقل خوانده می‌شود اگر و فقط اگر داشته باشیم:

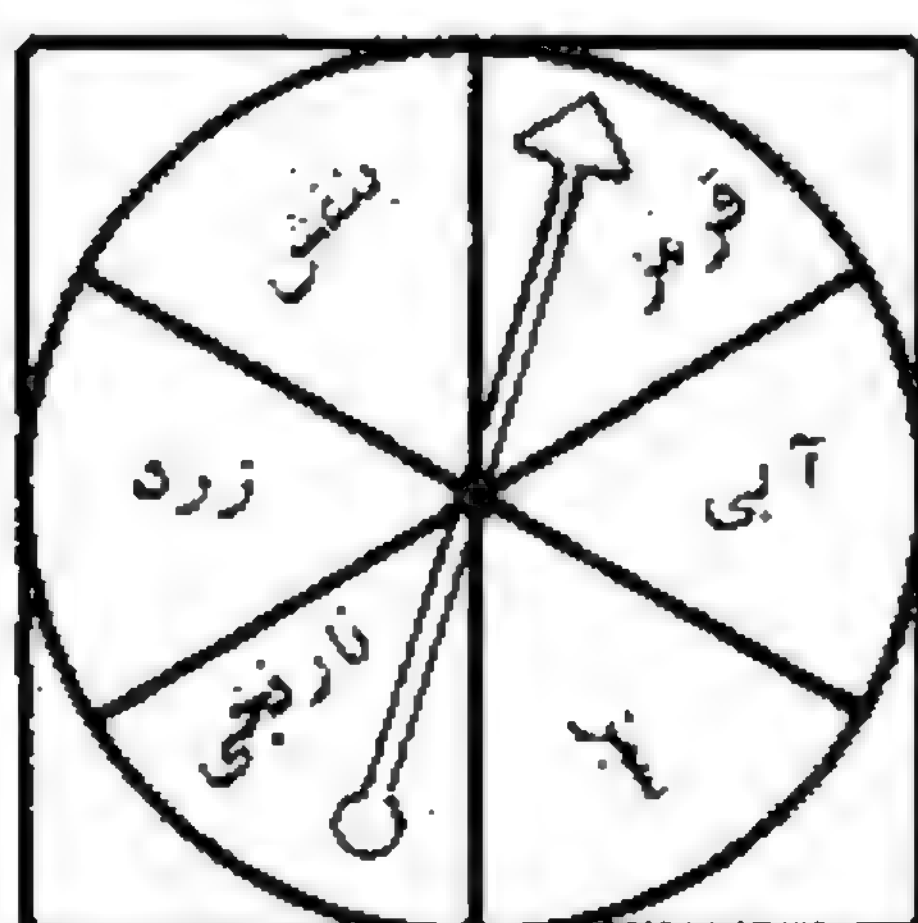
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

در غیر این صورت، دو پیشامد A و B را غیر مستقل می‌نامند.

در مثال دوم پیشامدهای A و B مستقل نیستند. یعنی پیشامد اول روی پیشامد دوم تأثیر می‌گذارد. برای اینکه مفهوم دوپیشامد مستقل را بهتر درک کنید به دومثال زیر توجه کنید:



اول



دوم

مثال ۳ - در دو دستگاه

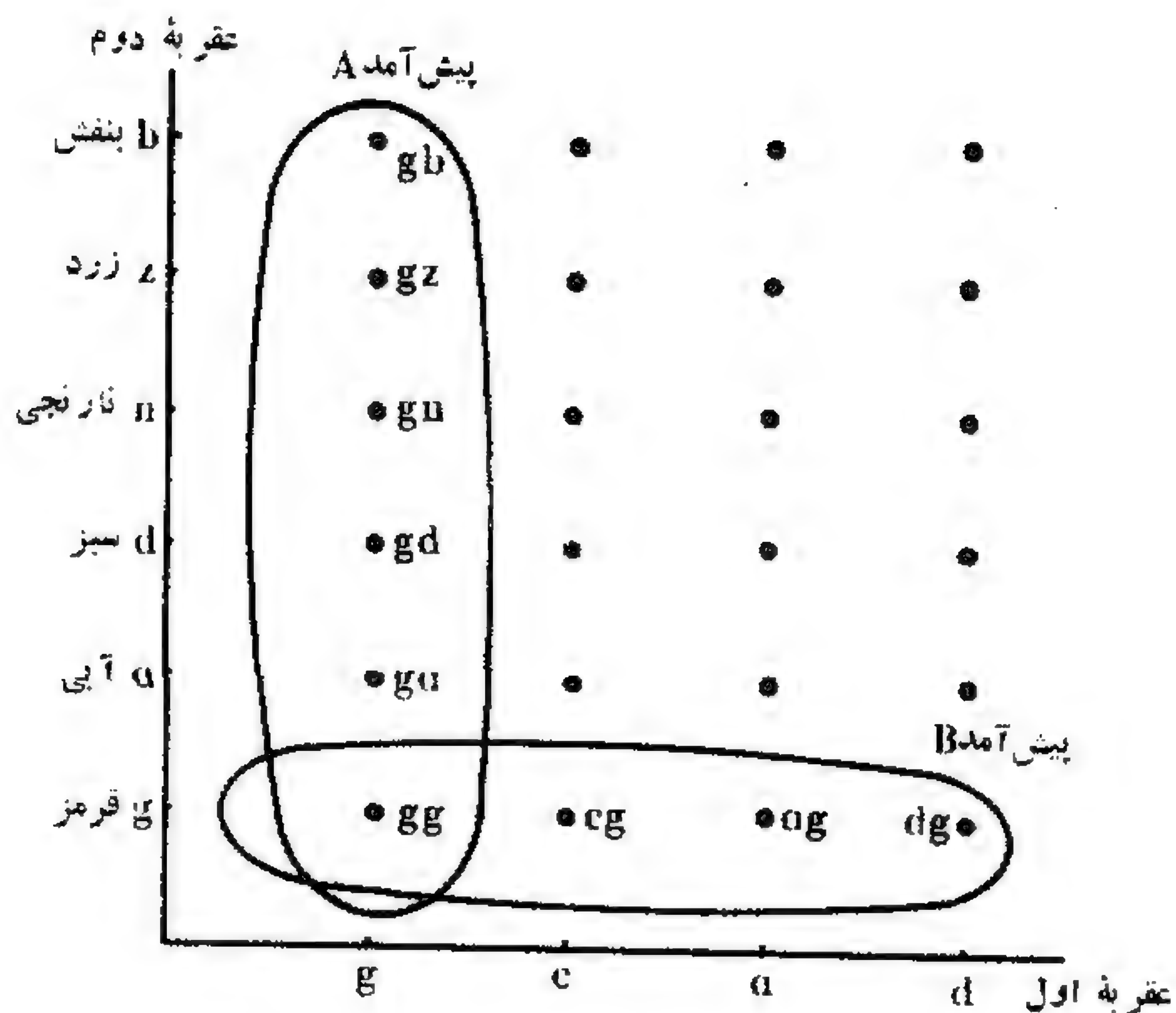
روبه‌رو، دو عقربه باهم به چرخش درمی‌آید، مطلوب است احتمال آن که عقربه اول و عقربه دوم هر دو در قسمت قرمز توقف کنند.

حل: پیشامدهای «توقف

عقربه اول در قسمت قرمز»، «توقف عقربه دوم در قسمت قرمز» را به ترتیب با A و B نمایش می‌دهیم. در زیر فضای نمونه‌ای و مجموعه‌های A و B نمایش داده شده است:

$$A = \{gg, ga, gd, gn, gz, gb\}$$

$$B = \{gg, cg, ag, dg\}$$



روشن است که A و B مستقل از هم می باشند، به این معنا که توقف عقربه اول در ناحیه قرمز تأثیری روی توقف عقربه دوم در ناحیه قرمز ندارد؛ بنابراین داریم:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$= \frac{6}{24} \times \frac{4}{24} = \frac{1}{24} \quad (\text{۲۴ عضوهای S است:})$$

از روی شکل نیز دیده می شود که $A \cap B = \{ gg \}$ ، یعنی پیشامد $A \cap B$ دارای یک عضو بوده و احتمال آن برابر $\frac{1}{24}$ است.

مثال ۲ - دو تاس با هم ریخته می شود؛ هرگاه A و B به ترتیب پیشامدهای « آمدن اقلایک ۲ » و « آمدن مجموع دو تاس ۵ » باشند؛ نمودار مختصاتی فضای نمونه ای و پیشامدهای A و B را رسم کرده، نشان دهید که A و B مستقل نیستند.

حل: در شکل صفحه بعد، نمودار مختصاتی فضای نمونه ای و پیشامدهای A و B نشان داده

شده است. در اینجا فضای نمونه ای دارای ۳۶ عضو بوده پیشامدهای A و B برابرند با:

$$A = \{ (۲,۱), (۲,۲), (۲,۳), (۲,۴), (۲,۵), (۲,۶), (۱,۲), (۳,۲), (۴,۲), (۵,۲), (۶,۲) \}$$

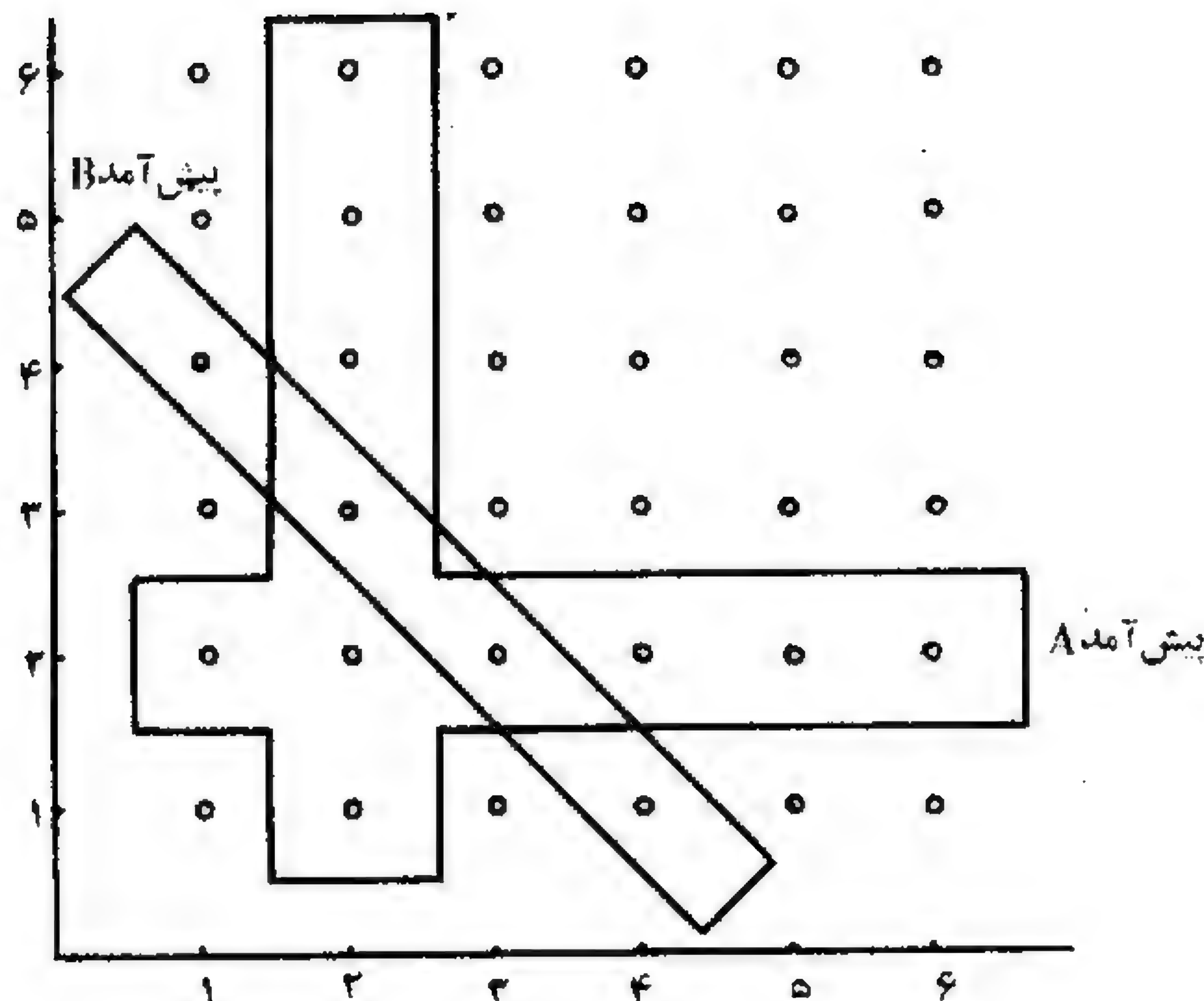
$$B = \{ (۱,۴), (۲,۳), (۳,۲), (۴,۱) \}$$

در نتیجه:

$$A \cap B = \{ (۲,۳), (۳,۲) \}$$

که احتمال آنها برابر می شود با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۱}{۳۶}$$



$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{18} \neq \frac{11}{36} \times \frac{1}{9}$$

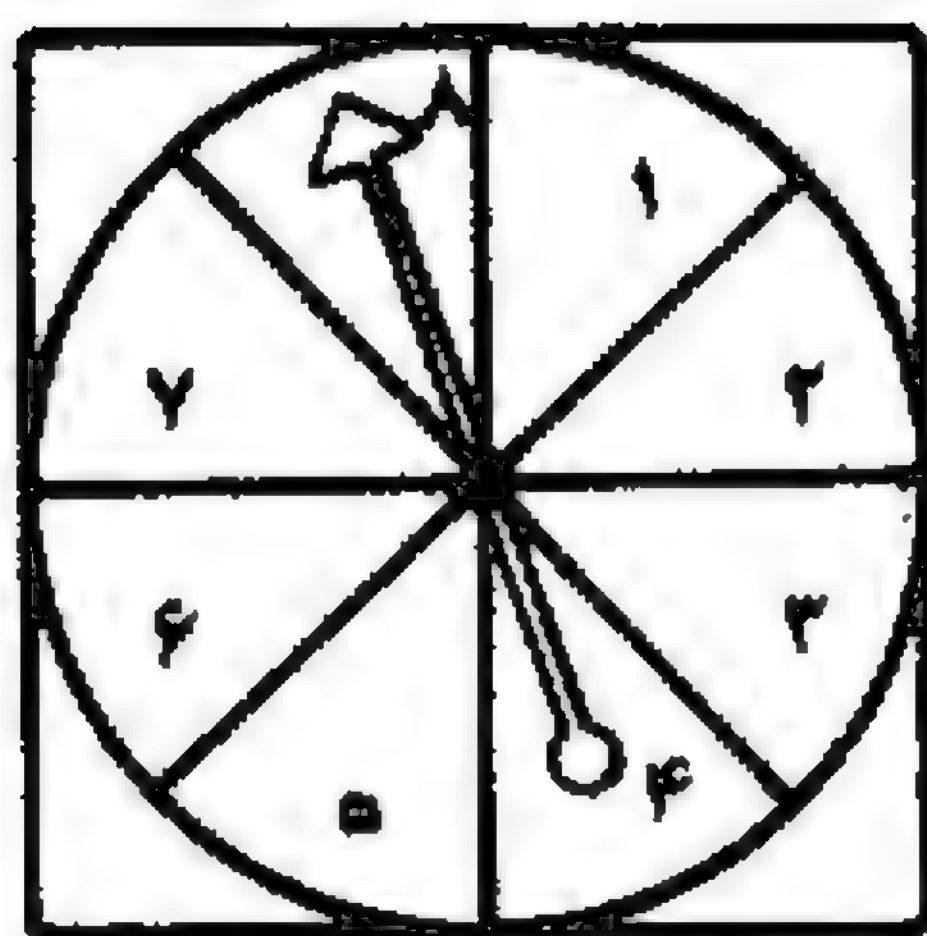
$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

در اینجا دیده می شود که :

یا :

لذا A و B مستقل نیستند .

تمرین



۱- در دستگاه رو به رو ، عقربه را به حرکت در می آوریم ، مطلوب است :

الف - احتمال آن که عقربه در قسمت ۴ یا ۶ متوقف شود (منظور از قسمت ۴ قسمتی است که با عدد ۴ مشخص شده است) .

ب - احتمال آن که عقربه در قسمتهایی که با عدد زوج یا با عدد اول مشخص شده اند توقف کند .

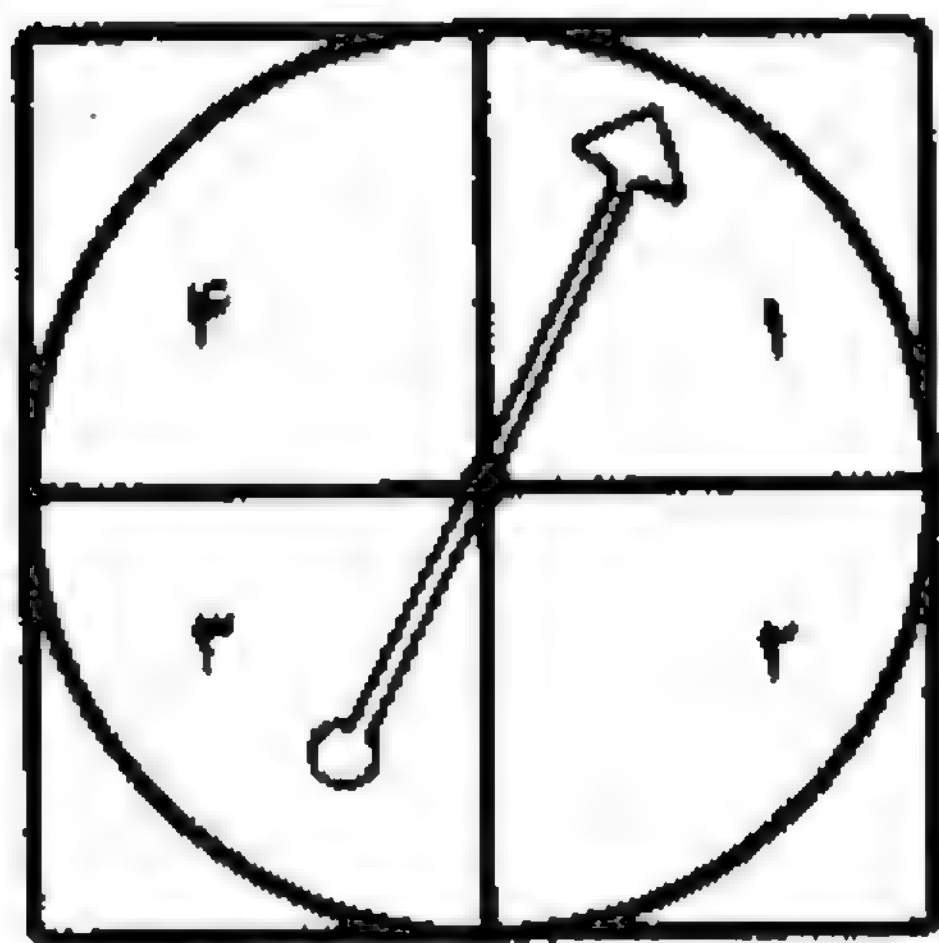
۲- حروف الفبای فارسی را به ترتیب روی ۳۲ کارت نوشته پس از مخلوط کردن کارتها يك کارت را به طور قرعه برمی داریم؛ مطلوب است : الف - احتمال آن که روی کارت بیرون آمده حرف « الف » یا « ب » باشد . ب - احتمال آن که روی کارت بیرون آمده یکی از حروف

اسامی رضا یا حمید باشد . ج - احتمال آن که روی کارت بیرون آمده هیچ يك از حروف كلمه « شكست » نباشد .

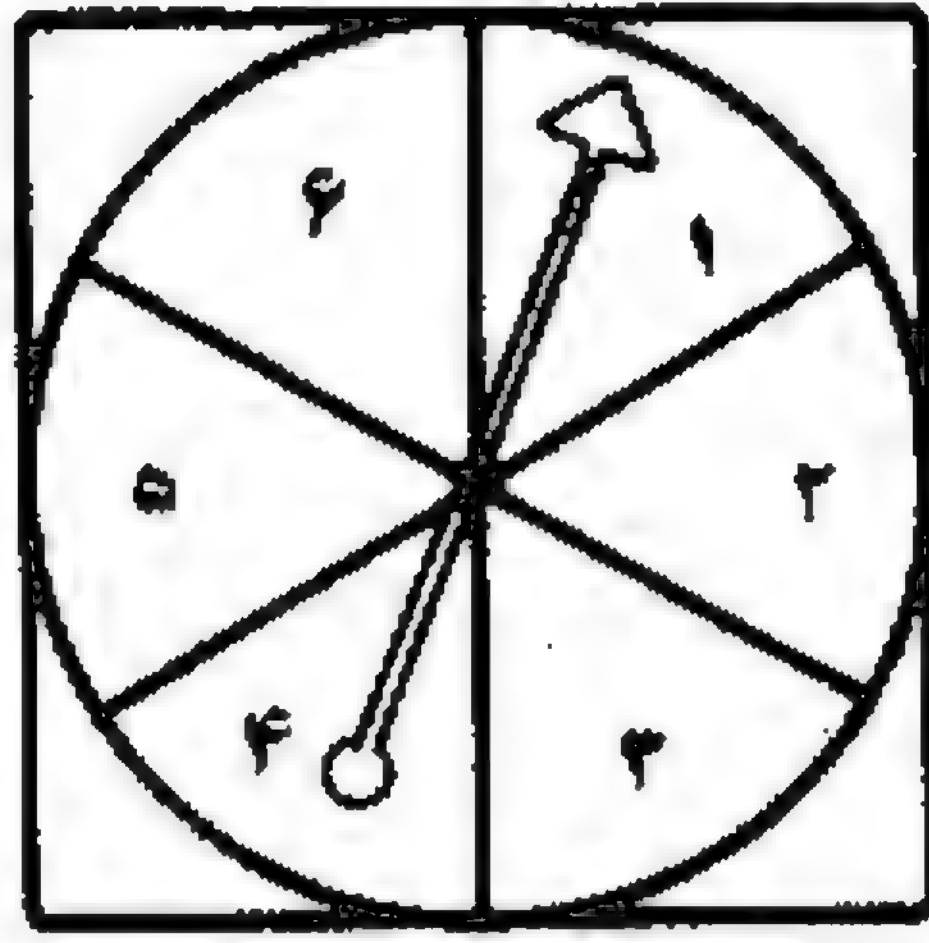
۳- دو تاس باهم ریخته می‌شوند ؛ مطلوب است : الف - احتمال آن که مجموع اعدادی که از دو تاس رو می‌شود ۵ یا ۶ باشد . ب - احتمال آن که مجموع اعدادی که از دو تاس رو می‌شود ۷ یا ۱۱ باشد . د - احتمال آن که مجموع اعدادی که از دو تاس می‌آید نه ۵ باشد و نه ۶ .

۴- يك کیسه محتوی ۷ مهره قرمز ، ۴ مهره سفید ، ۵ مهره آبی و ۴ مهره سیاه است . يك مهره به طور تصادفی از داخل کیسه بیرون می‌آوریم ؛ مطلوب است : الف - احتمال آن که این مهره قرمز یا آبی باشد . ب - احتمال آن که این مهره نه قرمز باشد و نه آبی .

۵ - اعداد يك تا ۱۵ را روی ۱۵ کارت مختلف نوشته پس از مخلوط کردن کارت‌ها ، سه کارت را به طور قرعه برمی‌داریم ؛ مطلوب است : الف - احتمال آن که عدد روی هریک از این سه کارت مضرب ۳ یا اول باشد . ب - احتمال آن که عدد روی هریک از سه کارت مضرب ۳ یا مضرب ۵ باشد .



اول



دوم

۶- در دو دستگاه روبه‌رو ، عقربه‌ها را باهم به حرکت در می‌آوریم ؛ مطلوب است : الف - احتمال آن که عقربه اول و عقربه دوم در قسمت ۳ متوقف شود . ب - احتمال آن

که عقربه‌های اول و دوم در قسمتهایی که با اعداد زوج مشخص شده‌اند متوقف شوند .

۷- در يك تجربه با سکه : الف - يك سکه دو مرتبه انداخته می‌شود ؛ احتمال آن که سکه در هر دو مرتبه خط بیاید چیست ؟ ب - يك سکه سه مرتبه انداخته می‌شود ؛ احتمال آن که سکه در هر سه مرتبه خط بیاید چیست ؟ ج - يك سکه n مرتبه انداخته می‌شود ؛ احتمال آن که سکه در هر n مرتبه خط بیاید چیست ؟

۸- يك صندوق محتوی ۱۰۰ عدد ساعت مچی است ؛ چهار عدد از این ساعت‌ها در حالی که هیچ نوع علائم ظاهری ندارند خراب می‌باشند ؛ شخصی از این صندوق ۴ ساعت را به طور تصادفی بیرون می‌آورد ؛ مطلوب است احتمال آن که هر چهار ساعت خراب باشند .

۹- ۳۲ کارت متشکل از ۴ رنگ به طور مساوی در دست است ؛ ۵ کارت را از میان ۳۲ کارت به طور تصادفی بیرون می‌کشیم ؛ مطلوب است احتمال آن که هر ۵ کارت هم‌رنگ باشند .

۱۰- دو سکه و يك تاس باهم ریخته می‌شوند ؛ مطلوب است احتمال آن که هر دو سکه

شیر و تاس عدد ۵ بیاید .

۱۱- يك كيسه محتوی ۳ مهره قرمز و ۵ مهره سبز و كيسه ديگر شامل ۶ مهره قرمز و ۲ مهره سبز است؛ از هر كيسه به طور تصادفی يك مهره بیرون می آوریم ؛ مطلوب است احتمال آن که هر دو مهره همرنگ باشند .

۱۲- يك تاس سفید و يك تاس سبز ریخته می شود ؛ فرض کنید A پیشامد آن باشد که مجموع اعداد تاسها که می آید ۷ و B پیشامد آن باشد که مجموع آنها ۵ و C پیشامد آن که تاس سبز ۴ بیاید؛ الف - آیا A و C مستقل از هم هستند؟ ب - آیا B و C مستقل از هم هستند ؟

آمار

آمار چیست ؟

مقدمه - چه تعداد از دانش آموزان ایران بادیست چپ می نویسند ؟ شاید به نظر برسد که این سؤال صرفاً جنبه کنجکاوی دارد ، اما اگر کمی بیشتر توجه شود ، جنبه های دیگر آن نیز روشن می گردد . در آموزشگاه دانش آموزان چپ دست بامشکلات خاصی مواجه هستند . فرض کنید این دانش آموزان در کلاس درس از صندلیهای دسته دار (دسته صندلیها در طرف راست فرض می شود) استفاده کنند و یا در امتحانات روی چنین صندلیهایی بنشینند ؛ در این صورت تخته محل نوشتن مقابل دستی که آنها می نویسند قرار نمی گیرد ، و این وضع برای چنین دانش آموزانی ناراحت کننده است . مسئله دیگر برای این دانش آموزان مسئله نور است . برای کسانی که بادیست راست می نویسند نور باید از طرف چپ تابیده شود در صورتی که وضع برای دانش آموزان چپ دست برعکس است . لذا ، رئیس آموزشگاه یا مسئولان مربوط باید در موقع خرید این نوع صندلیها بتوانند حدس بزنند که چند درصد از دانش آموزان ممکن است چپ دست باشند . به چه طریق می توان درصد دانش آموزان چپ دست شهر تهران را تعیین کرد ؟

در صنعت و تجارت نیز با سؤالاتی از قبیل « شماره کفش مردان بیشتر بین چه نمره هایی قرار دارد ؟ » مواجه می شویم . در برخورد اول این سؤال نیز قدری عجیب به نظر می آید . ولی از نقطه نظر تجارت ، يك کارخانه کفش سازی باید بداند چه شماره ای بیشتر مصرف دارد تا آن شماره را بیشتر تولید کند . همچنین باید به درصد تقریبی افرادی که پاها ی بسیار بزرگ یا بسیار کوچک دارند توجه کند تا بتواند درصد تولید کفشهای بسیار بزرگ و بسیار کوچک را کنترل نماید . به چه طریق می توان شماره پای مردان را تعیین کرد ؟ آیا امکان دارد که پای همه مردان را اندازه گرفت ؟

از نقطه نظر مدیریت ، مدیر يك کارخانه (مثلاً کارخانه پودر رختشویی) باید بداند که چند درصد از خانواده ها محصول کارخانه او را مصرف می کنند . اگر يك واحد تولیدی به طور مداوم از نظر مردم در مورد محصول خود اطلاع داشته باشد مسلماً آن واحد تولیدی بهتر می تواند در بازار فعال باقی بماند . زیرا به محض آن که مدد کارخانه احساس کند که مردم از محصول کارخانه او (مثلاً پودر رختشویی) خسته شده اند ، می تواند با تغییر در نوع محصول نامطلوبی بیرون آید او می تواند با تعویض نام محصول ، یا تغییر در ظاهر آن ، یا تغییر در

جدیدی همراه با تبلیغات مجدد آ برای محصول کارخانه خود مشتری به دست آورد. به چه طریق می توان از نظر مردم یا خانواده ها در مورد محصول يك کارخانه اطلاع به دست آورد؟ آیا عملی است که از همه مردم در این مورد سؤال به عمل آید؟

علم آمار می تواند به سؤالات بالا پاسخ دهد. بطور کلی می توان گفت که آمار علمی است که با جمع آوری، سازمان بندی و تجزیه و تحلیل اطلاعات سروکار دارد.

اطلاعات آماری و سازمان بندی آنها

پس از برگزاری يك امتحان نمرات ریاضی ۲۱ نفر دانش آموزان يك کلاس به صورت زیر تعیین شده است:

۱۹، ۱۰، ۱۸، ۱۵، ۱۲، ۱۴، ۱۹، ۱۸، ۱۸، ۱۶، ۷، ۱۲، ۱۲، ۱۶، ۶، ۹، ۲۱

۱۶، ۱۲، ۱۵، ۸

این دسته از اعداد که در اینجا با انجام يك آزمایش به دست آمده است به نام داده های آماری (= اطلاعات آماری = ارقام آماری) خوانده می شود. روشن است که این نمره ها به صورتی که نوشته شده اند مطالب زیادی راجع به وضع دانش آموزان در این درس نشان نمی دهند. برای بحث بیشتر این عددها را به ترتیب صعودی مرتب می کنیم:

۱۶، ۱۶، ۱۶، ۱۵، ۱۴، ۱۳، ۱۲، ۱۲، ۱۲، ۱۲، ۱۲، ۱۱، ۱۰، ۹، ۷، ۶

۱۹، ۱۸، ۱۸، ۱۵، ۱۴

حال از روی این داده های مرتب شده یا سازمان داده شده مطالب زیر را قوی می توان بیان کرد:

- کمترین نمره ۶ و بیشترین نمره ۱۹ است.
- اختلاف کمترین و بیشترین نمره یعنی « ۱۹ - ۶ » برابر ۱۳ است.
- نمره ۱۴ در میان نمرات واقع شده است، یعنی ۱۰ نفر از ۱۴ بیشتر و ۱۵ نفر از ۱۴ کمتر گرفته اند.

- نمره ۱۲ در این نمرات بیشترین تکرار شده است.

اعمالی که ما در اینجا انجام دادیم یعنی:

- جمع آوری اطلاعات

- سازمان بندی و نمایش اطلاعات

- توصیف این اطلاعات

مقدمات علم آمار بوده به نام آماد توصیفی خوانده می شود. در این بخش به ترتیب این مطالب را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

جمع آوری اطلاعات - داده‌های آماری یا به طریق آزمایش و تجربه یا به طریق مراجعه به آرای عمومی به دست می‌آید. در این صورت باید عمل تجربه و یا تنظیم و توزیع پرسش‌نامه‌ها با کمال دقت انجام گیرد. گاهی اوقات از تجارب دیگران و داده‌های آماری که آنها قبلاً به دست آورده‌اند استفاده می‌کنیم. در این صورت باید در صحت و درستی آنها اطمینان داشته باشیم.

سازمان دادن کیفی (چونی) داده‌ها - دیدید که چگونه نمره‌های ریاضی به دست آمده از يك کلاس یعنی داده‌های آماری را مرتب کردیم تا به کمک آنها بهتر بتوانیم راجع به قوه ریاضی آن کلاس بحث کنیم. غالب اوقات برای آن که تصور فوری و روشنی از اطلاعات آماری به دست آوریم، آنها را با کمک نمودار نمایش می‌دهیم.

مثال - مدیر يك مدرسه می‌خواهد برای بوفه دبیرستان دستور تهیه بستنی بدهد. برای این که بستنی از يك نوع زیاد و از نوع دیگر کم نیاید، قبلاً بین دانش‌آموزان اوراق زیر را که به نام پرسش‌نامه خوانده می‌شود توزیع می‌کند:

لطفاً در مقابل بستنی مورد علاقه خود علامت X بزنید.

۱- بستنی پاستوریزه
۲- بستنی شکلاتی لیوانی
۳- بستنی خامه‌دار
۴- بستنی میوه
۵- بستنی چوبی

پس از جمع آوری پرسش‌نامه‌ها و خواندن نظریات اطلاعات زیر به دست آمده است:

۱- بستنی پاستوریزه لیوانی	۶۰
۲- بستنی شکلاتی لیوانی	۸۰
۳- بستنی خامه‌دار	۱۴۰
۴- بستنی میوه	۱۲۰
۵- بستنی چوبی	۷۰

نموداری به صورت زیر این اطلاعات را به طور روشنی نشان می‌دهد:



در صفحات بعد قوانین دقیق رسم این نمودار را که به نام نمودار ستونی خوانده می شود، توضیح خواهیم داد .

نمودار دایره ای - این نمودار از يك طرف برای نشان دادن رابطه قسمت ها بایکدیگر و از طرف دیگر رابطه قسمت ها با همه اطلاعات آماری به کار برده می شود . برای رسم نمودار دایره ای ابتدا جدولی تشکیل می دهیم که دارای دو خاصیت زیر باشد :

الف - مفروضات را به طور روشن نشان دهد .

ب - نسبت یا درصد هر قسمت را با کل اطلاعات مشخص سازد .

پس از تشکیل جدول نمودار آن را به طریق تقسیم يك دایره به قطاع هایی متناسب با کسرها و یا درصدها رسم می کنیم .

مثال - کارمندی پس از دریافت حقوق ماهانه آن را به ترتیب زیر به مصرف می رساند :

اجاره : $\frac{1}{3}$ حقوق ؛ غذا : $\frac{1}{4}$ حقوق ؛ لباس : $\frac{1}{8}$ حقوق ؛ متفرقه : $\frac{1}{6}$ حقوق ؛ پس انداز : $\frac{1}{8}$ حقوق .

این اطلاعات را با استفاده از نمودار دایره ای نشان دهید .

حل : ابتدا باید توجه کرد که مجموع کسرها برابر يك باشد :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{8+6+3+4+3}{24} = 1$$

حال با استفاده از خواص نسبت ها و آنچه راجع به زوایای مرکزی خوانده اید، و با كمك نقاله

يك دایره را به قسمی به قطاع هایی تقسیم می کنیم که هر قطاع نمایش یکی از کسرها ی فوق باشد .

در زیر زوایای مرکزی متناظر با کسرها ی فوق محاسبه شده است :

$$\frac{x_1}{360^\circ} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x_1 = 360^\circ \Rightarrow x_1 = 120^\circ \quad \text{اجاره :}$$

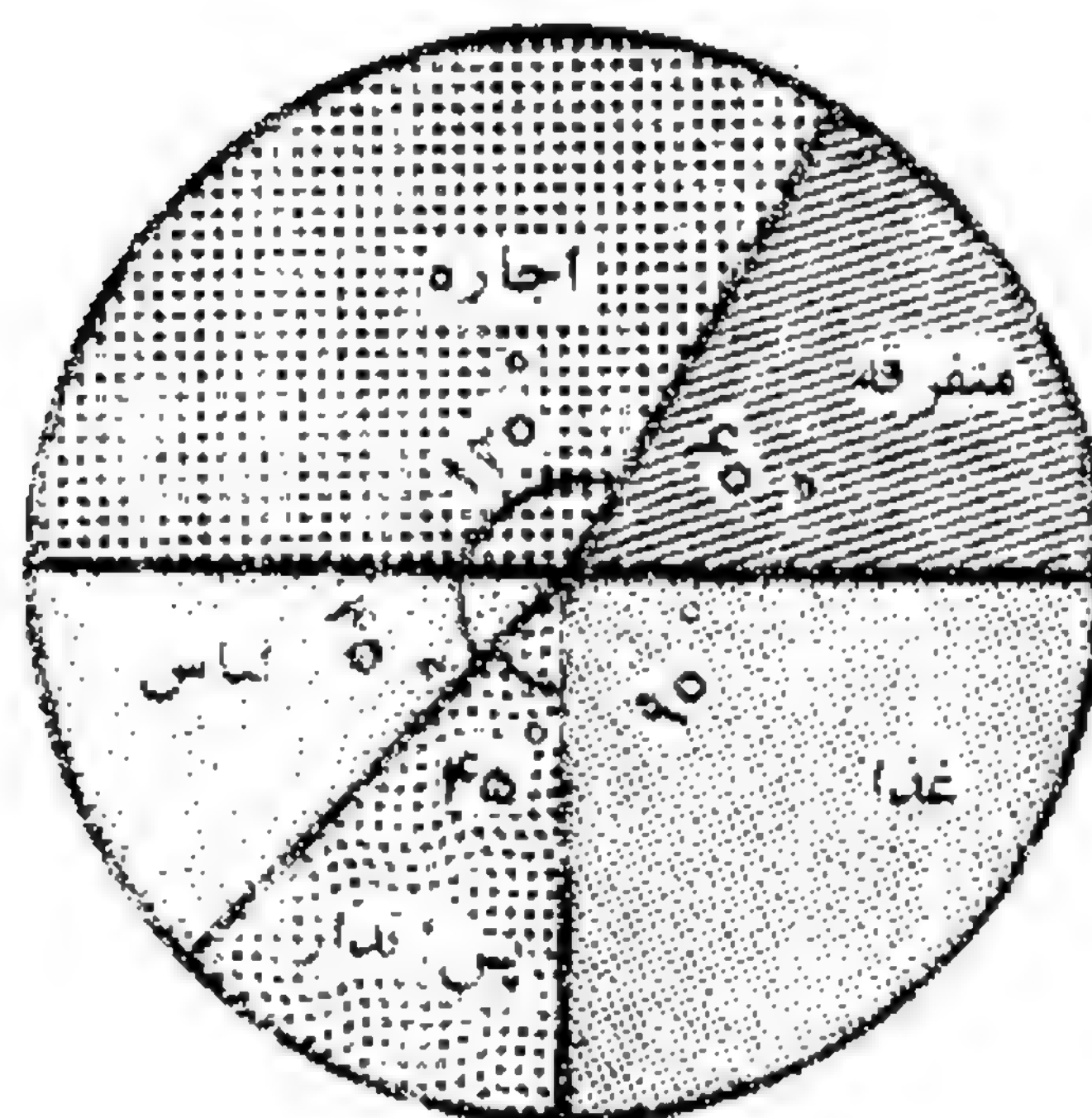
$$\frac{x_2}{360^\circ} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4x_2 = 360^\circ \Rightarrow x_2 = 90^\circ \quad \text{غذا :}$$

$$\frac{x_3}{360^\circ} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6x_3 = 360^\circ \Rightarrow x_3 = 60^\circ \quad \text{متفرقه :}$$

$$\frac{x_4}{360^\circ} = \frac{1}{8} \Rightarrow 8x_4 = 360^\circ \Rightarrow x_4 = 45^\circ \quad \text{لباس یا پس انداز :}$$

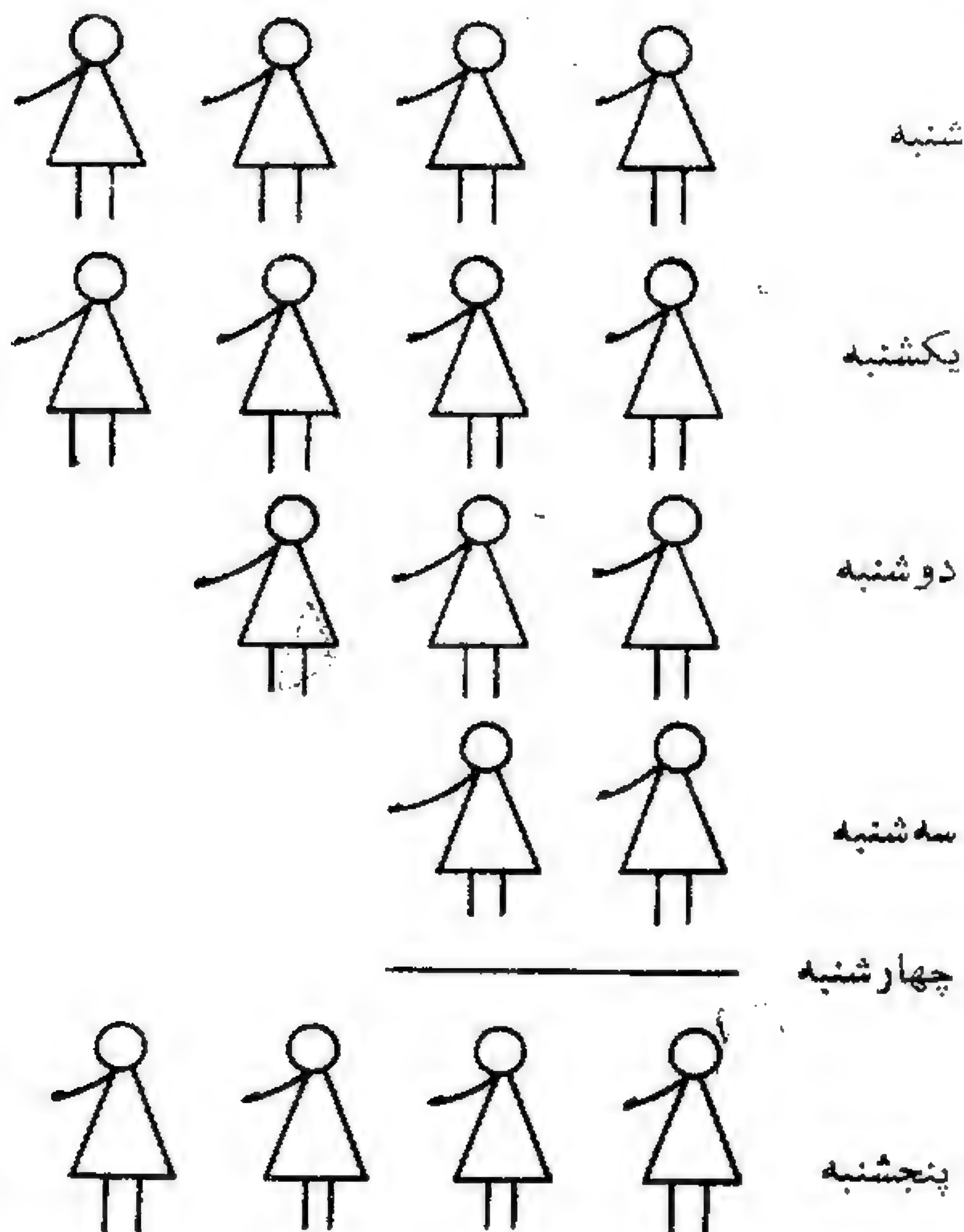
جدول و نمودار دایره‌ای به صورت زیر خواهد بود :

درجات متناظر	کسرها
۲۰°	$\frac{1}{3}$
۹۰°	$\frac{1}{4}$
۶۰°	$\frac{1}{6}$
۴۵°	$\frac{1}{8}$
۴۵°	$\frac{1}{8}$



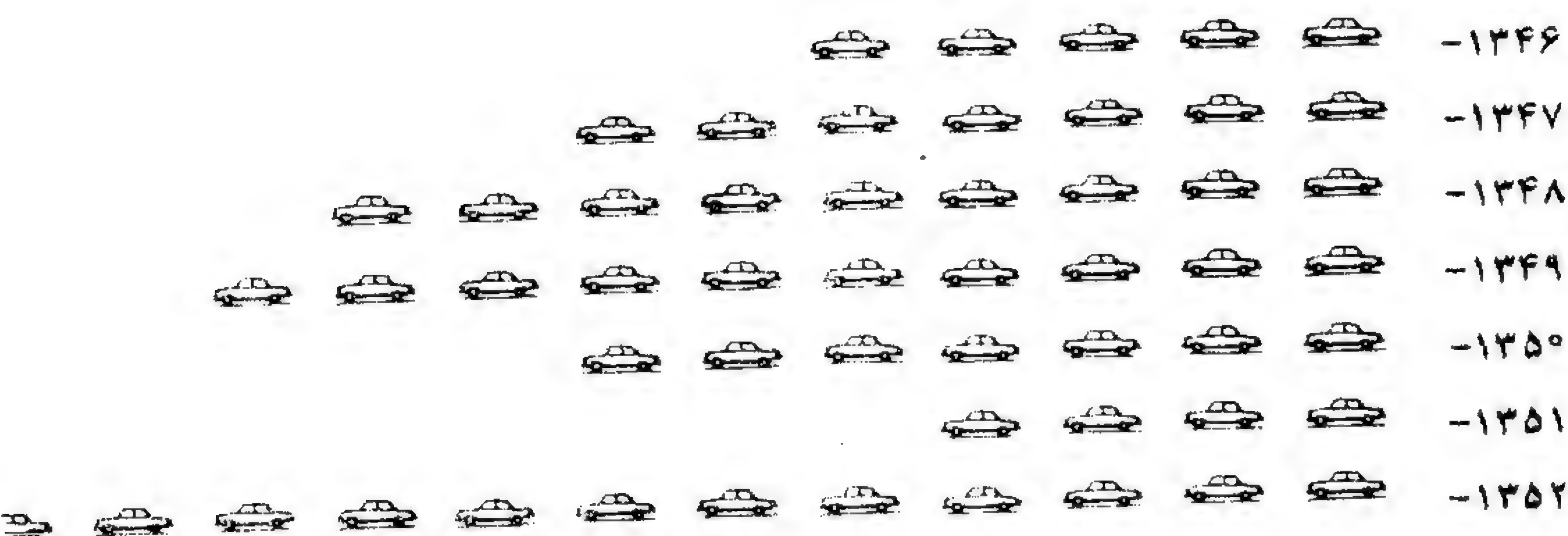
نمودار تصویری - طریق دیگر برای نمایش ارقام آماری استفاده از تصویر خود شیء

است ، بدین ترتیب که تصویر شیء را عیناً یا به عنوان نماینده تعدادی از اشیا نمایش دهیم .
در زیر تعداد غایبین کلاس يك مدرسه در روزهای هفته اول آذرماه نمایش داده شده است .
هر تصویر نماینده يك دانش‌آموز است .



در زیر محصولات يك كارخانه اتومبيل سازي را در چند سال متوالي نشان داده شده است.

هر تصوير اتومبيل نماينده ۱۰,۰۰۰ اتومبيل است :



تمرین

۱- در اندازه گیری قد اعضای تیم فوتبال يك دبیرستان اعداد زیر بر حسب سانتیمتر به دست آمده است :

۱۵۶، ۱۶۴، ۱۵۵، ۱۴۹، ۱۵۷، ۱۶۰، ۱۵۵، ۱۴۹، ۱۵۱، ۱۵۵، ۱۶۵، ۱۶۲

۱۶۴، ۱۶۲، ۱۵۵

الف - طبق آنچه راجع به تمره ریاضی دانش آموزان يك کلاس دیدید ، این داده ها را سازمان بدهید .

ب - عدد میانی این داده ها را مشخص سازید .

ج - چه قدی از دانش آموزان بیشتر تکرار شده است .

د - اختلاف قد ، بلندترین و کوتاهترین بازیکنان این تیم را تعیین کنید .

۲- در يك امتحان قوه که از ۵۰ نفر از دانش آموزان به عمل آمده نتیجه زیر حاصل شده است :

بسیار خوب : ۸ نفر ؛ خوب : ۱۲ نفر ؛ متوسط خوب : ۲۴ نفر ؛ متوسط : ۱۲ نفر ؛ ضعیف : ۴ نفر . این داده ها را با استفاده از نمودار دایره ای نشان دهید .

۳- کارمندی حقوق ماهانه خود را به ترتیب زیر خرج می کند :

اجاره : ۳۵٪ ؛ غذا : ۳۵٪ ؛ لباس : ۱۵٪ ؛ مسترقه : ۱۵٪ ؛ پس انداز : ۵٪ . نمودار دایره ای این داده ها را رسم کنید .

۴- ۶ نفر از نامزدنای انتخاب انجمن شهر يك شهرستان به ترتیب زیر درصد از آرا

را به دست آورده‌اند :

رضا : ۳۰٪ ؛ فرزاد : ۲۰٪ ؛ حسین : ۱۵٪ ؛ فرهاد : ۱۰٪ ؛ عبدالله : ۱۲٪ ؛ فرید : ۱۳٪ . نمودار دایره‌ای این داده‌ها را رسم کنید .

۵- مأمور اتاق دفتر يك دبیرستان در يك روز تعداد دانش آموزانی را كه در ساعتهای مختلف روز به دفتر مراجعه می‌کنند به صورت زیر گزارش داده است :

ساعات	۸-۹	۹-۱۰	۱۰-۱۱	۱۱-۱۲	۱۴-۱۵	۱۵-۱۶	۱۶-۱۷
تعداد دانش‌آموزان	۶	۱۲	۱۴	۱۴	۱۳	۱۰	۶

نمودار ستونی این داده‌ها را رسم کنید .

۶- يك افسر پلیس تعداد ماشینهایی را كه در ساعتهای مختلف يك روز در یکی از خیابانهای تهران تخلف کرده‌اند به صورت زیر یادداشت کرده است :

ساعات	۹-۱۰	۱۰-۱۱	۱۱-۱۲	۱۲-۱۳	۱۳-۱۴	۱۴-۱۵	۱۵-۱۶
تعداد ماشینها	۶	۷	۱۲	۱۰	۱۰	۹	۷

نمودار ستونی این داده‌ها را رسم کنید .

سازمان دادن کمی (چندی) اطلاعات

اطلاعات آماری كه با مراجعه به آرای عمومی یا از تجربه یا از طریق دیگر به دست می‌آید ، مجموعه‌ای از اعداد نامرتب هستند كه قبل از استفاده علمی از آنها لازم است مرتب و خلاصه شوند . همان طور كه در شروع بخش دیدید ، اولین قدم برای استخراج مطالب لازم از این اطلاعات مرتب کردن آنها به طور صعودی است . يك روش مفیدتر عبارت است از : خلاصه کردن اطلاعات و تشکیل جدولی به نام جدول فراوانی یا توزیع (= پخش) داده‌ها . بدین ترتیب كه مجموعه داده‌ها را به تعدادی دده (= طبقه) تقسیم کرده ، سپس عضوهای هر دده را شمرده تعیین کنیم كه در هر دده چند عضو وجود دارد .

با كمك این جدول كه جزئیات آن با مثال در زیر توضیح داده شده است ، می‌توان بعضی از ویژگیهای داده‌های آماری را فوری و به آسانی تشخیص داد .

مثال - در يك تجربه آماری كه شامل اندازه گیری بوده مشاهدات زیر بر حسب سانتیمتر

به دست آمده است : (اعداد تا كمتر از يك سانتیمتر گرد شده‌اند)

۱۷ ، ۳۰ ، ۲۶ ، ۲۷ ، ۲۲ ، ۲۲ ، ۲۵ ، ۱۷ ، ۲۵ ، ۲۵ ، ۱۵ ، ۲۷ ، ۱۸
۱۴ ، ۱۸ ، ۱۱ ، ۲۱ ، ۱۹ ، ۲۴ ، ۲۱ ، ۲۳ ، ۲۷ ، ۱۳ ، ۲۳

جدول فراوانی این داده‌ها را تنظیم کنید .

حل : ۱- ابتدا این داده‌ها را رده‌بندی می‌کنیم . رده‌بندی داده‌ها تا حدود زیادی اختیاری است و تعداد آنها برحسب زیادی و کمی داده‌های آماری تغییر می‌کند ، به عبارت دیگر، هرچه داده‌های آماری زیادتر باشد ، تعداد رده‌ها زیادتر خواهد بود ؛ هرچه قدر تعداد رده‌ها کم باشد محاسبات سبکتر شده ولی کیفیت نتایج کاهش می‌یابد و اگر تعداد رده‌ها زیاد باشد محاسبات سنگین و دقت نتایج افزایش پیدا می‌کند و برای تعدیل معمولاً تعداد رده‌ها را بین ۵ تا ۲۰ انتخاب می‌کنند ؛ در این مثال ما تعداد رده‌ها را ۵ می‌گیریم .

۲- پس از تعیین تعداد رده‌ها فاصله‌های آنها یا عرض هر رده را تعیین می‌کنیم . در مثال فوق مشاهده می‌شود که کمترین عدد ۱۱ و بزرگترین آنها ۳۰ است لذا مجموع عرضهای رده‌ها باید فاصله (۳۰ - ۱۱) یعنی ۱۹ را دربرگیرد ۱۹ را دامنه تغییرات می‌گویند و با R نشان می‌دهند ، چون ۵ رده انتخاب کرده‌ایم عرض هر رده (یا فاصله هر رده) برابر است با

$$\text{عرض هر رده} = \frac{R+1}{5} = \frac{19+1}{5} = 4$$

(باید توجه داشت که اعداد بالا با کمتر از یک گرد شده‌اند. لذا در صورت کسر $R+1$ منظور شده است در صورتیکه اعداد کمتر از ۱۰ یا ۱۰۰ گرد شده باشند بایستی به جای عدد ۱ در صورت کسر به ترتیب اعداد ۱۰ یا ۱۰۰ قرار داد .)

۳- حدود رده‌ها و کرانه رده‌ها .

رده‌ها را به ترتیب زیر تعیین می‌نماییم .

۳۰ - ۲۷ و ۲۶ - ۲۳ و ۲۲ - ۱۹ و ۱۸ - ۱۵ و ۱۴ - ۱۱

اکنون عضوهای هر رده را شمرده و در جدول زیر قرار می‌دهیم . تعداد شمارش‌های هر رده را فراوانی مطلق آن رده می‌گویند :

فراوانی مطلق رده‌ها	شمارش	رده‌ها
۳	///	۱۱-۱۴
۵	////	۱۵-۱۸
۵	////	۱۹-۲۲
۶	////	۲۳-۲۶
۴	////	۲۷-۳۰
۲۳	۲۳	جمع

در رده اول اندازه‌های ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ منظور شده است که ۱۱ را حد پائین و ۱۴ را حد بالای آن گویند و در رده دوم اندازه‌های ۱۵ و ۱۶ و ۱۷ و ۱۸ به حساب آمده است که ۱۵ را حد پائین و ۱۸ را حد بالای این رده می‌گویند، همچنین حد پائین و بالای رده پنجم به ترتیب ۲۷ و ۳۰ می‌باشد.

برای تعیین کرانه پائین و کرانه بالای هر رده به طریق زیر عمل می‌کنیم.

$$\text{کرانه پائین رده اول} = \frac{۱۴ + ۱۵}{۲} = ۱۴/۵$$

$$\text{کرانه پائین رده دوم} = \frac{۱۸ + ۱۹}{۲} = ۱۸/۵$$

باید توجه داشت که کرانه بالای رده اول با کرانه پائین رده دوم مساویست و نیز کرانه بالای رده دوم با کرانه پائین رده سوم یکی است، به این ترتیب کرانه پائین رده دوم ۱۴/۵ و کرانه بالای آن ۱۸/۵ می‌باشد. با توجه به مطالب فوق کرانه پائین و بالای هر رده از جدول بالا را تعیین کرده و در جدول زیر قرار می‌دهیم.

تراوانی مطلق رده‌ها	کرانه رده‌ها	حدود رده‌ها
۳	۱۴/۵ - ۱۵/۵	۱۱ - ۱۴
۵	۱۸/۵ - ۱۹/۵	۱۵ - ۱۸
۵	۲۲/۵ - ۲۳/۵	۱۹ - ۲۲
۶	۲۶/۵ - ۲۷/۵	۲۳ - ۲۶
۴	۳۰/۵ - ۳۱/۵	۲۷ - ۳۰
۲۳	جمع	

کرانه پائین و بالای هر رده را حدود واقعی آن رده می‌گویند. چون کرانه بالای هر رده با کرانه پائین رده بعدی مساوی است، مثلاً کرانه بالای رده اول با کرانه پائین رده دوم هر دو ۱۴/۵ می‌باشد، باید روشن کنیم که ۱۴/۵ در کدام يك از رده‌ها منظور می‌شود، قرار بر این است که مثلاً در رده اول یعنی رده ۱۴/۵ - ۱۵/۵ اعدادی که از ۱۵/۵ بزرگتر یا مساوی با آن می‌باشد و کوچکتر از ۱۴/۵ هستند منظور شود و از رده دوم یعنی رده ۱۸/۵ - ۱۹/۵ اعدادی که از ۱۹/۵ بزرگتر یا مساوی با آن می‌باشد و کوچکتر از عدد ۱۸/۵ می‌باشند به حساب آیند و به همین ترتیب در رده پنجم یعنی رده ۳۰/۵ - ۳۱/۵ عددهائی که از عدد ۳۱/۵ بزرگتر و یا مساوی آن بوده و کوچکتر از ۳۰/۵

باشند منظور گردند ، به عبارت دیگر مثلاً در رده اول عدد $۱۴/۵$ منظور نمی‌شود و در رده دوم به حساب می‌آید و همچنین عدد $۲۶/۵$ در رده چهارم به حساب نمی‌آید و در رده پنجم منظور می‌شود .

نمودار ستونی جدول فراوانی

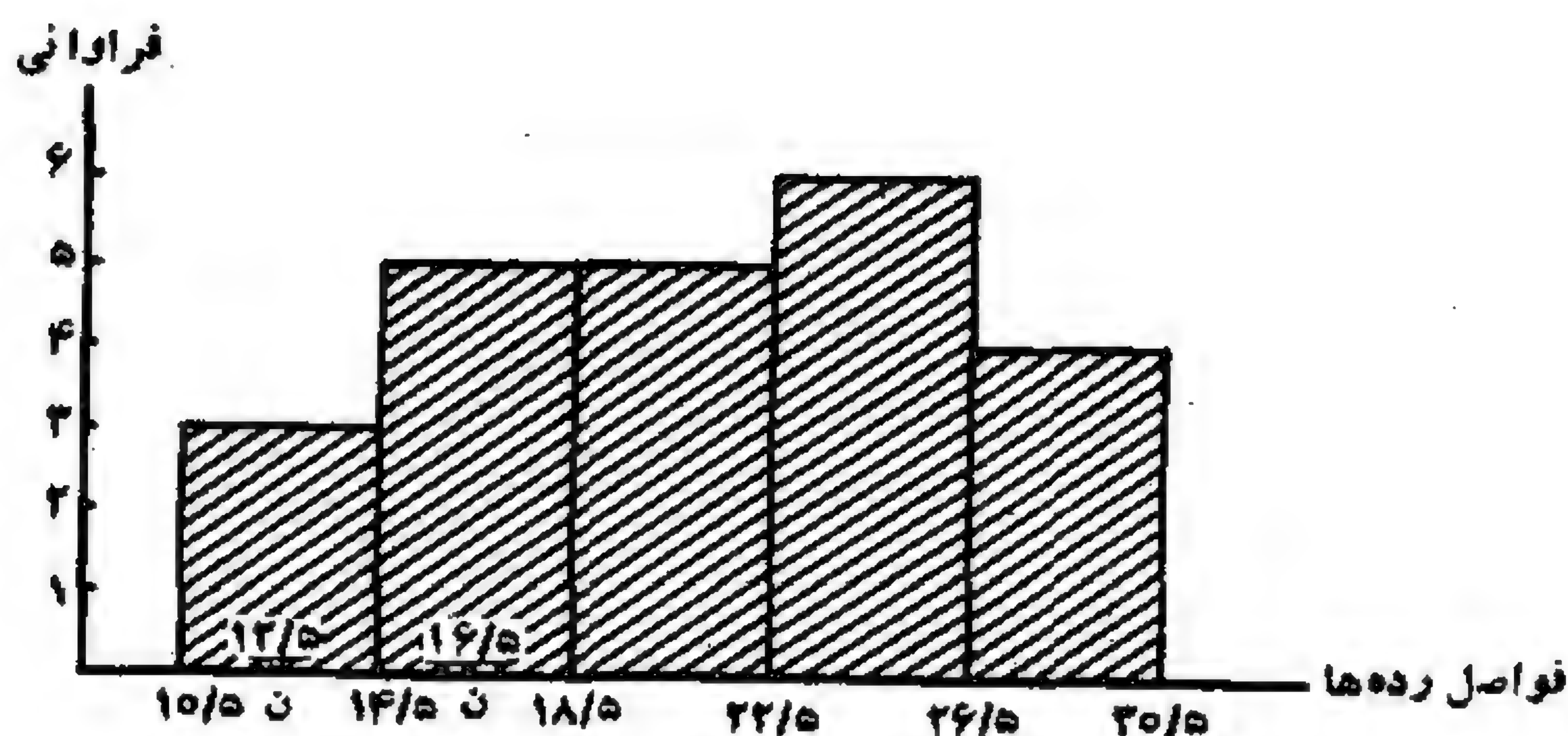
اگرچه جدول توزیع فراوانی در ارائه بعضی از ویژگیهای داده‌های آماری مفید است ولی گاهی اوقات نمایش تصویری همان داده‌ها ، خواص مورد نظر را روشن‌تر و سریع‌تر نشان می‌دهد . برای رسم نمودار ستونی جدول فراوانی داده‌ها آماری به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

الف - در صفحه مختصات و دوی محور افقی با انتخاب واحد مناسب و توجه به عرض رده‌ها فواصل رده‌ها را متوالیاً نقل می‌کنیم .

ب - دوی محور عمودی فراوانی رده‌ها را نقل می‌کنیم .

ج - دوی فاصله رده‌ها (عرض رده‌ها) مستطیلی که ارتفاع آن متناسب با فراوانی آن رده است بنا می‌کنیم .

در زیر نمودار ستونی جدول فراوانی فوق رسم شده است .



نماینده رده - گاهی اوقات هر رده بایک نماینده (عدد یا نقطه) مشخص می‌شود . این نماینده نقطه وسط یا اندازه وسط هر فاصله انتخاب شده در نمودار آن را با حرف « ن » مشخص می‌سازیم . اندازه نماینده يك رده برابر است با نصف مجموع کرانه‌های بالا و پایین آن رده با

۱- باید توجه داشت که عرض رده‌ها ممکن است مساوی گرفته نشوند ولی مساوی گرفتن آنها کار را ساده‌تر می‌کند .

نصف مجموع مرزهای آن رده . در مثال بالا نماینده رده اول برابر است با :

$$\frac{11+14}{2} = \frac{10/5+14/5}{2} = 12/5$$

فراوانی نسبی و فراوانی درصد

فراوانی نسبی هر رده برابر است با فراوانی آن رده تقسیم بر مجموع فراوانیهای همه ردهها .
از ضرب فراوانی نسبی در صد ، فراوانی درصد به دست می آید .
در زیر نماینده رده ، فراوانی نسبی و فراوانی درصد مربوط به مثال مورد بحث نشان داده شده است :

حدود ردهها	حدود واقعی یا کرانه ردهها	نماینده رده	فراوانی هر رده	نسبی فراوانی	فراوانی درصد
۱۱ — ۱۴	۱۰/۵ — ۱۴/۵	۱۲/۵	۳	۰/۱۳	۱۳
۱۵ — ۱۸	۱۴/۵ — ۱۸/۵	۱۶/۵	۵	۰/۲۱۷	۲۱/۷
۱۹ — ۲۲	۱۸/۵ — ۲۲/۵	۲۰/۵	۵	۰/۲۱۷	۲۱/۷
۲۳ — ۲۶	۲۲/۵ — ۲۶/۵	۲۴/۵	۶	۰/۲۶	۲۶
۲۷ — ۳۰	۲۶/۵ — ۳۰/۵	۲۸/۵	۴	۰/۱۷۴	۱۷/۴
			۲۳		

نمودار چندبر (= خط شکسته ای)

هرگاه خواسته باشیم چند دسته دادهها را باهم مقایسه کنیم ، از نوعی نمودار که به نمودار خط شکسته ای یا نمودار چندبر معروف است استفاده می کنیم . برای رسم نمودار چندبر يك دسته دادهها به یکی از دو طریق زیر عمل می کنیم :

۱- جدول فراوانی دادهها را تنظیم کرده نمودار ستونی جدول مربوط را رسم می کنیم ؛ سپس وسطهای ضلعهای بالایی مستطیلهای این نمودار ستونی را با خطهای مستقیم متوالی بهم وصل می نماییم (شکل - الف) .

۲- جدول فراوانی دادهها را همراه با نماینده ردهها تنظیم کرده ، سپس نمایندههای ردهها را روی محور x ها و فراوانی ردهها را روی محور y ها نقل می کنیم ؛ آن گاه نقاط متناظر با این

زوجهارا در صفحه دوم محور مشخص کرده آنها را متوالیاً با خطهای مستقیم بهم وصل می کنیم
(شکل - ب) .

مثال - نمودار خط شکسته ای داده های زیر را رسم کنید :

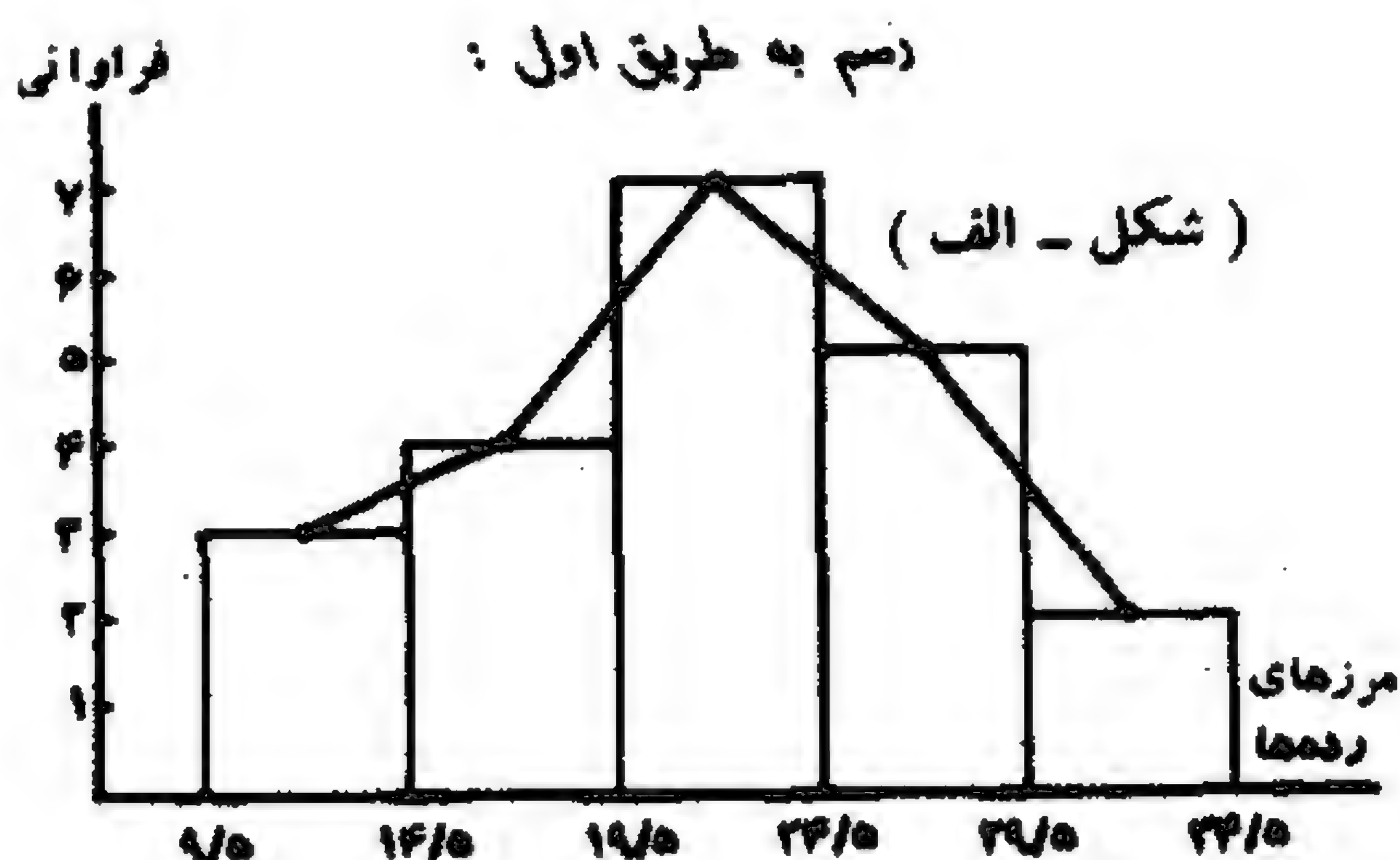
۲۷، ۱۵، ۳۳، ۱۷، ۲۵، ۲۲، ۲۲، ۲۷، ۱۲، ۲۶، ۳۴، ۱۷، ۲۳، ۱۳، ۲۷

۲۳، ۲۱، ۲۳، ۱۹، ۲۱، ۱۰

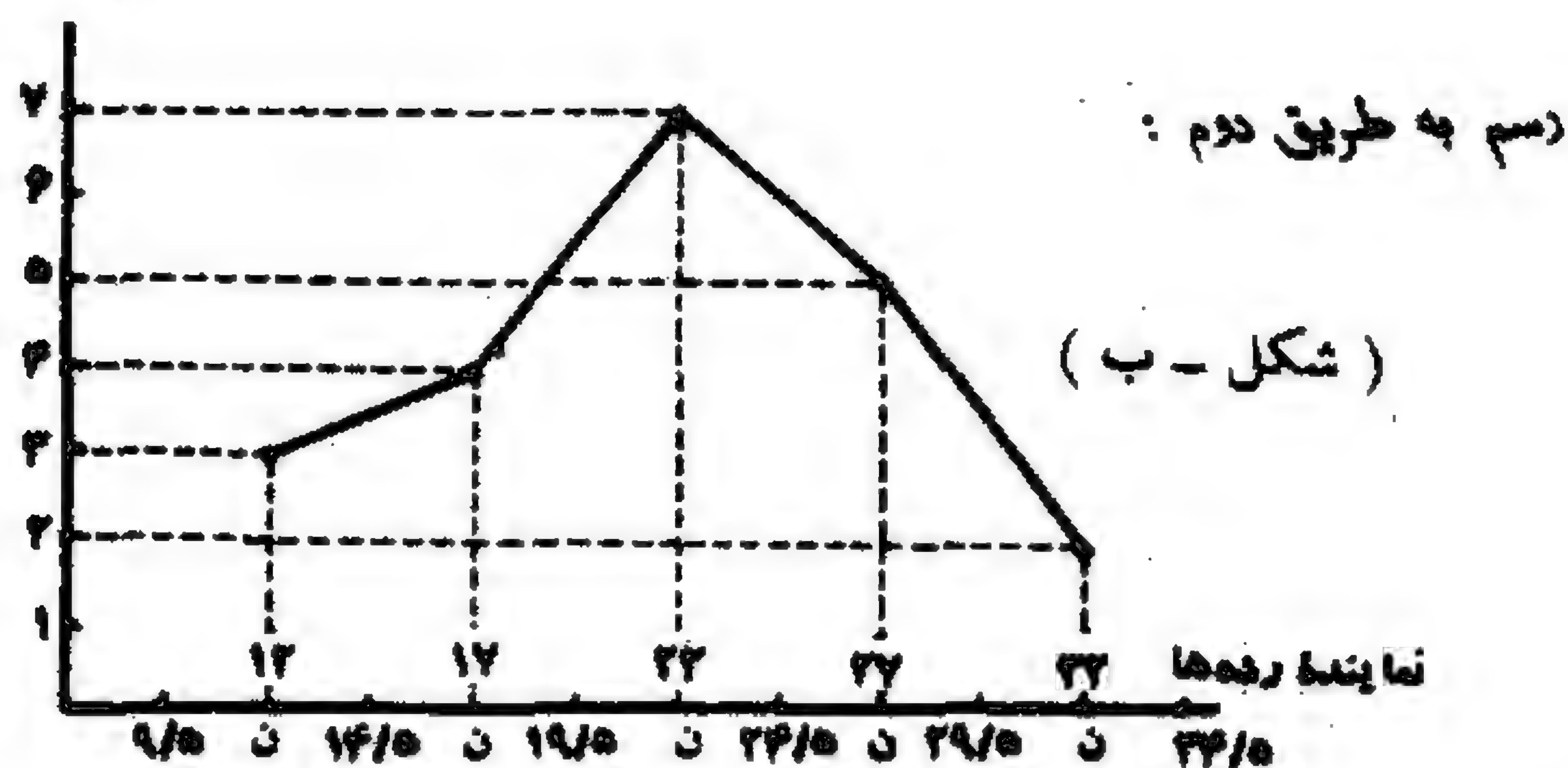
حل : جدول توزیع فراوانی داده های بالا را که شامل نماینده رده ها نیز می باشد

تنظیم می کنیم :

مرزهای رده ها	نماینده رده ها	فراوانی
۹/۵ — ۱۴/۵	۱۲	۳
۱۴/۵ — ۱۹/۵	۱۷	۴
۱۹/۵ — ۲۴/۵	۲۲	۷
۲۴/۵ — ۲۹/۵	۲۷	۵
۲۹/۵ — ۳۴/۵	۳۲	۲



فراوانی



فراوانی تجمعی

فراوانیهایی که در درس قبل توضیح داده شد ، برای سازمان دادن ، خلاصه کردن و نمایش داده های آماری کمکهای با ارزشی می کنند ، ولی بعضی اوقات نیاز به دانستیهای مربوط به تعداد مشاهداتی داریم که اندازه های آنها کمتر از اندازه معین در این داده ها می باشد. دانستیهای مزبور از طریق يك نوع فراوانی که به نام فراوانی تجمعی خوانده می شود به دست می آید . در زیر جزئیات این فراوانی با کمک مثال توضیح داده شده است .

مثال - در زیر سن دانش‌آموزان يك کلاس شبانه نوشته شده است ؛ جدول تجمع فراوانی این اطلاعات را تنظیم کنید .
(کسر سال حذف شده است بدین معنی که مثلاً ۲۴ سال و يك روز تا ۲۴ سال و ۳۶۵ روز ۲۴ ساله منظور شده است .)

۲۷ ، ۱۵ ، ۳۳ ، ۱۷ ، ۲۵ ، ۲۲ ، ۲۲ ، ۲۷ ، ۱۲ ، ۲۶ ، ۳۴ ، ۱۷ ، ۲۳ ، ۱۳
۲۷ ، ۲۳ ، ۲۱ ، ۲۴ ، ۱۹ ، ۲۱ ، ۱۰

حل : ابتدا جدول فراوانی این داده‌ها را تنظیم می‌کنیم :

رده‌ها	۱۰-۱۴	۱۵-۱۹	۲۰-۲۴	۲۵-۲۹	۳۰-۳۴
فراوانی رده‌ها	۴	۳	۷	۵	۲

در این جدول مشاهده می‌شود که :

- هیچ کدام از مشاهدات از ۱۰ کمتر نیست .
 - ۳ مشاهده (۰+۳) کمتر از ۱۵ وجود دارد .
 - ۷ مشاهده (۰+۳+۴) کمتر از ۲۰ وجود دارد .
 - ۱۴ مشاهده (۰+۳+۴+۷) کمتر از ۲۵ موجود است .
 - ۱۹ مشاهده (۰+۳+۴+۷+۵) کمتر از ۳۰ موجود است .
 - ۲۱ مشاهده (۰+۳+۴+۷+۵+۲) کمتر از ۳۵ می‌باشد .
- اعداد ۰ ، ۳ ، ۷ ، ۱۴ ، ۱۹ و ۲۱ به ترتیب فراوانیهای تجمعی کمتر از ۱۰ ، کمتر از ۱۵ ، کمتر از ۲۰ ، کمتر از ۲۵ ، کمتر از ۳۰ و کمتر از ۳۵ ، اطلاعات فوق خوانده می‌شود . در اینجا می‌بینید که :

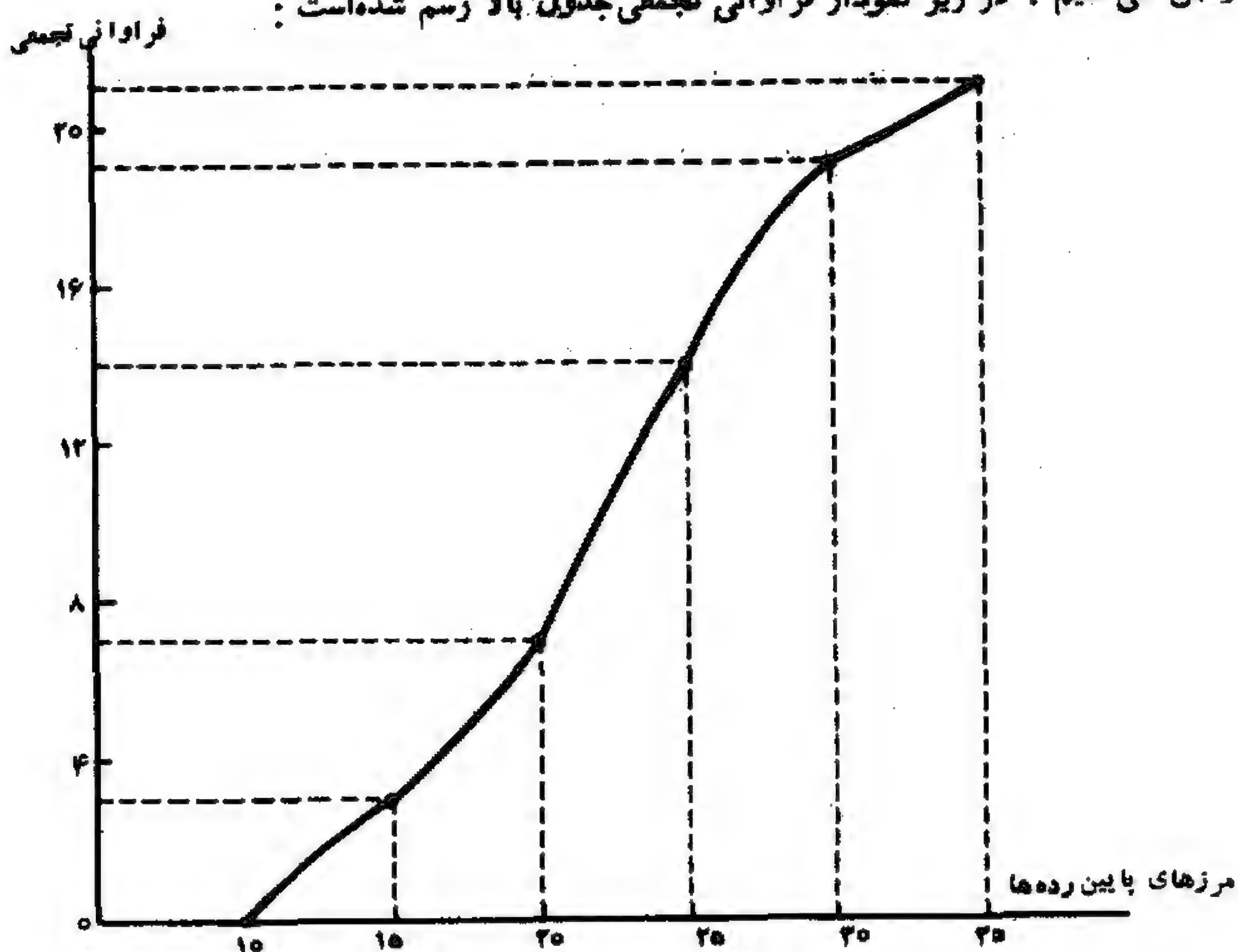
برای به دست آوردن فراوانی تجمعی مشاهدات کمتر از کرانه پایین يك رده ، در يك دسته داده‌های آماری ، کافی است فراوانیهای تمام رده‌های ماقبل آن رده را باهم جمع کنیم .
در زیر ، جدول فراوانی تجمعی داده‌های بالا با توجه به جدول بالا تنظیم شده است :

داده‌ها	فراوانی تجمعی
کمتر از ۱۰	۰
کمتر از ۱۵	۰+۳=۳
کمتر از ۲۰	۰+۳+۴=۷
کمتر از ۲۵	۰+۳+۴+۷=۱۴
کمتر از ۳۰	۰+۳+۴+۷+۵=۱۹
کمتر از ۳۵	۰+۳+۴+۷+۵+۲=۲۱

رسم نمودار فراوانی تجمعی

برای رسم نمودار فراوانی تجمعی يك دسته داده‌های آماری به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

- جدول فراوانی تجمعی داده‌ها را تنظیم می‌کنیم .
- مرزهای پایین رده‌ها را روی محور افقی نقل می‌کنیم .
- تجمع فراوانی کمتر از هر رده را روی محور قائم نقل می‌کنیم .
- نقاط متناظر با این زوج‌ها را در صفحه دو محور به دست آورده آنها را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم . در زیر نمودار فراوانی تجمعی جدول بالا رسم شده‌است :



تمرین

۱- برای داده‌های :

۱۸۱	۱۸۲	۱۸۶	۱۹۳	۱۲۵	۷۰
۱۶۸	۱۷۲	۱۶۱	۱۴۹	۷۷	۱۲۳
۱۱۵	۱۱۴	۱۳۵	۱۳۶	۱۱۵	۹۷
۱۱۲	۱۰۹	۱۰۴	۱۰۸	۱۸۶	۱۱۷
۸۰	۶۴	۱۲۸	۱۱۵	۱۳۲	۹۲
۱۲۳	۱۲۰	۷۵	۱۳۱	۱۱۸	۱۶۱
۸۴	۱۰۰	۱۰۶	۷۱	۵۶	۱۴۸
۱۱۳	۱۱۱	۱۲۸	۸۳	۱۱۴	۱۱۲
					۱۳۵

الف - جدول فراوانی را تشکیل دهید. ب - نمودار ستونی و نمودار چندبر را رسم کنید.
۲- برای داده‌های :

۲۷۸۶	۳۲۱۷	۲۶۱۸	۲۸۴۵
۲۸۴۲	۲۵۲۳	۲۳۲۷	۲۸۳۸
۲۳۱۲	۲۶۹۷	۲۲۲۰	۳۰۱۰
۳۲۱۸	۲۸۵۵	۳۱۳۷	۲۵۸۱
۲۴۲۶	۳۳۳۶	۲۹۷۸	۲۷۱۴

الف - جدول فراوانی را تشکیل دهید. ب - نمودار ستونی و نمودار چندبر را رسم کنید.

۳- در امتحانات ورودی دانشگاه نمره هردانش آموز از ۱۰۰۰ کم می‌شود. در زیر نمره ۵۰ نفر از داوطلبان که به طور تصادفی انتخاب شده، داده شده است. جدول فراوانی و نمودار ستونی این داده‌ها را رسم کنید :

۵۸۲	۵۱۳	۶۰۰	۵۷۶	۶۵۳	۶۹۱
۵۲۵	۵۹۶	۷۰۲	۶۲۰	۶۱۱	۵۲۸
۷۲۶	۶۲۱	۶۹۸	۷۳۰	۶۰۶	۶۵۴
۷۴۵	۷۶۷	۷۸۰	۷۲۹	۶۳۰	۴۷۷
۵۶۷	۷۴۰	۵۸۵	۵۴۰	۶۲۷	۶۳۳
۶۰۹	۳۲۷	۴۸۳	۵۷۶	۶۰۰	
۶۴۷	۳۴۱	۵۲۵	۶۹۳	۶۹۵	
۷۳۲	۶۹۸	۵۷۶	۷۲۰	۳۸۵	
۵۸۸	۸۹۷	۵۲۷	۶۲۳	۷۷۱	
۶۷۲	۶۰۳	۶۸۱	۵۱۹	۴۸۵	
۶۴۸	۶۳۹	۷۸۹	۶۹۶	۶۶۷	

۴- در زیر، جدول فراوانی نمره‌های ریاضی ۳۰ نفر از دانش‌آموزان داده شده است.

حدود داده‌ها	۱—۳	۴—۶	۷—۹	۱۰—۱۲	۱۳—۱۵	۱۶—۱۸	۱۹—۲۰
فراوانی	۱	۳	۵	۷	۸	۴	۲

الف - کرانه رده‌ها و نماینده آنها را تعیین کنید.

ب - نمودار ستونی و چندبر جدول فوق را رسم کنید.

۵- يك مدرسه عالی دارای ۱۴۲۶ دانشجو است؛ در زیر جدول فراوانی مربوط به سن این

دانشجویان داده شده است : (کسر سال حذف شده است)

حدود رده‌ها	۱۷—۲۱	۲۲—۲۶	۲۷—۳۱	۳۲—۳۶	۳۷—۴۱
فراوانی	۵۶۲	۴۵۰	۳۵۰	۵۸	۶

الف - کرانه رده‌ها و نماینده آنها را تعیین کنید .

ب - نمودار ستونی و خط شکسته‌ای جدول فوق را رسم کنید .

ج - مطلوب است رسم نمودار ستونی و چند بری جدول زیر :

حدود رده‌ها	۲۵—۳۹	۵۰—۷۴	۷۵—۹۹	۱۰۰—۱۲۴	۱۲۵—۱۴۹
فراوانی	۱۵	۲۵	۳۰	۲۰	۱۰

۷- جدول فراوانی تجمعی و نمودار داده‌های آماری زیر را رسم کنید:

۱۵ ، ۱۷ ، ۱۷ ، ۱۸ ، ۱۹ ، ۲۱ ، ۲۱ ، ۲۲ ، ۲۳ ، ۲۵ ، ۲۷ ، ۱۹ ، ۲۱

۲۸ ، ۳۰ ، ۳۱ ، ۳۲ ، ۳۳ ، ۳۴ ، ۳۵ ، ۳۶ ، ۳۹ ، ۴۰

۸- مطلوب است رسم نمودار فراوانی تجمعی جدول زیر :

حدود رده‌ها	۱—۳	۴—۶	۷—۹	۱۰—۱۲	۱۳—۱۵	۱۶—۱۸	۱۹—۲۱
فراوانی	۱	۳	۵	۷	۸	۴	۲

۹- برای داده‌های :

۷	۲۹	۳۸	۴۴	۴۸	۵۳	۵۸
۱۲	۳۱	۳۹	۴۴	۴۸	۵۴	۵۹
۱۵	۳۲	۳۹	۴۵	۴۸	۵۴	۵۹
۱۸	۳۲	۴۰	۴۵	۴۹	۵۴	۶۰
۲۰	۳۴	۴۱	۴۵	۴۹	۵۴	۶۳
۲۱	۳۶	۴۱	۴۶	۵۰	۵۵	۶۴
۲۳	۳۷	۴۲	۴۷	۵۱	۵۶	۶۶
۲۶	۳۷	۴۳	۴۷	۵۳	۵۷	۶۷

مطلوب است : الف - تنظیم جدول فراوانی . ب - فراوانی نسبی و فراوانی درصد هر

رده . ج - رسم نمودار ستونی ، چندبر و فراوانی تجمعی .

توصیف اطلاعات

مطالبی که تا کنون از آنها بحث شد جنبه تجسمی داشته قادر به توصیف همه جنبه‌های اطلاعات آماری نیستند ؛ از طرفی روشهای آماری در غالب اوقات برای بیان مشخصات دقیق‌تر ارقام احتیاج به توصیفهای عددی دارند ؛ اکنون با استفاده از اعمال حسابی روی ارقام آماری بعضی از این توصیفهای عددی را توضیح می‌دهیم .

فرض کنید نمره‌های ریاضی ۲۱ نفر دانش‌آموز يك کلاس به صورت زیر مرتب شده باشد :

۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۲، ۱۲، ۱۲، ۱۲، ۱۲، ۱۴، ۱۵، ۱۵، ۱۶، ۱۶،

۱۶، ۱۸، ۱۸، ۱۸، ۱۹، ۱۹

در اینجا می‌خواهیم ببینیم چه نمره‌ای باید انتخاب کرد که بتواند به عنوان نماینده این نمرات ارائه شود. باید توجه داشت که در آمار مسئله تفسیر که تقریباً يك مسئله قضاوت است نیز مطرح می‌باشد، بدین معنی که در انتخاب این نماینده يك نفر ممکن است تمام نمرات را جمع کرده حاصل آنها را بر تعدادشان تقسیم کند:

$$\frac{6+7+8+\dots+19}{21} = 13/5$$

نفر دیگر ممکن است نمرات را به طریق صعودی یا نزولی مرتب کرده (که در اینجا مرتب شده است) عدد وسطی را به عنوان نماینده انتخاب کند (در این مثال ۱۴). بالاخره نفر سوم ممکن است نمره‌ای را که تعداد بیشتری از دانش‌آموزان گرفته‌اند (در این مثال ۱۲) به عنوان نماینده نمرات انتخاب کند. هر کدام از انتخابهای فوق ممکن است از يك نقطه نظر نماینده ارقام داده شده باشند. این نماینده‌ها که به ترتیب میانگین حسابی، میانه، نما خوانده می‌شوند، نمونه‌هایی از اندازه‌های مرکزی هستند که آنها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

میانگین حسابی

شما مسلماً تاکنون بدون آن که خودتان توجه داشته باشید از میانگین حسابی استفاده کرده‌اید. مثلاً وقتی نمرات دروس مختلف در يك پرسش اعلام می‌شود، شما فوری این نمرات را زیر هم نوشته جمع می‌کنید سپس مجموع حاصل را بر تعداد دروس تقسیم می‌کنید تا به اصطلاح معدل نمرات خود را به دست آورید. این معدل نمرات همان میانگین حسابی در آمار است. مثال دیگر: شخصی با اتومبیل خود راه بین شیراز - تهران را که ۹۰۰ کیلومتر است در ۱۲ ساعت طی می‌کند؛ اگر او بخواهد بفهمد که اتومبیل او به طور متوسط در هر ساعت چند کیلومتر راه طی کرده است، کافی است که مسافت پیموده شده را بر ساعاتی که در راه بوده است تقسیم کند: $\frac{900}{12} = 75$ ، سرعت به دست آمده میانگین حسابی سرعتها می‌باشد.

تعریف - میانگین حسابی یا به طور ساده میانگین يك دسته داده‌های آماری که شامل n اندازه باشد، برابر است با مجموع اندازه‌ها تقسیم بر تعداد آنها یعنی n .

به عبارت دیگر، میانگین حسابی n اندازه $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ که با \bar{x} نمایش داده می‌شود؛ برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

مثال ۱ - میانگین حسابی اندازه‌های ۸، ۶، ۱۴، ۱۲ و ۱۰ را تعیین کنید.

$$\bar{x} = \frac{8+6+14+12+10}{5} = 10$$

مثال ۲ - مطلوب است تعیین میانگین حسابی اندازه‌های داده شده :

۷۰، ۲۵، ۲۵، ۲۵، ۲۵، ۳۰، ۳۰، ۳۰، ۴۰، ۴۰، ۴۰، ۴۰

طبق تعریف فوق میانگین این داده‌ها برابر است با :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{40+40+40+40+30+30+30+25+25+25+25+70}{12} \\ &= \frac{(40+40+40+40)+(30+30+30)+(25+25+25+25)+70}{4+3+4+1} \\ &= \frac{4 \times 40 + 3 \times 30 + 4 \times 25 + 1 \times 70}{4+3+4+1} \quad (1) \\ &= \frac{160+90+100+70}{12} = \frac{420}{12} = 35 \end{aligned}$$

همان طور که قبلاً دیدید، تعداد دفعاتی که يك اندازه آماری تکرار می‌شود به نام فراوانی آن اندازه خوانده شده معمولاً آن را با f نمایش می‌دهند. در مثال فوق، فراوانیهای داده‌های ۴۰، ۳۰، ۲۵ و ۷۰ به ترتیب برابرند با ۴، ۳، ۴ و ۱. هرگاه داده‌ها را به ترتیب با x_1, x_2, x_3 و x_4 و فراوانی آنها را به ترتیب با f_1, f_2, f_3 و f_4 نمایش دهیم. با توجه

به رابطه (۱) داریم :

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + f_4 x_4}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4}$$

هرگاه به جای ۴ اندازه داده شده، k اندازه x_1, x_2, \dots, x_k که فراوانیهای آنها به ترتیب f_1, f_2, \dots, f_k می‌باشند، داشته باشیم در این صورت میانگین حسابی آنها برابر

خواهد بود یا :

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_k x_k}{f_1 + f_2 + \dots + f_k}$$

در اینجا \bar{x} را میانگین وزنی ارقام آماری می‌نامند.

مثال - مطلوب است محاسبه میانگین وزنی جدول زیر :

x	۴	۱۴	۲۴	۳۴
f	۲	۸	۲۰	۱۰

حل : طبق دستور بالا داریم :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{2 \times 4 + 8 \times 14 + 20 \times 24 + 10 \times 34}{2+8+20+10} \\ &= \frac{8+112+480+340}{40} = \frac{940}{40} = 23.5 \end{aligned}$$

برای تعیین میانگین وزنی داده‌های آماری که به صورت جدول فراوانی داده شده است؛ در دستور بالا به جای x_1, x_2, \dots, x_k به ترتیب نماینده‌های رده‌ها و به جای فراوانی‌ها، فراوانی‌های رده‌ها را قرار می‌دهیم.

میانه

میانه يك دسته داده‌های آماری که با حرف m نمایش داده می‌شود، عددی است که نصف داده‌ها از آن بزرگتر و نصف داده‌ها از آن کوچکتر باشند. به عبارت دیگر:

الف - هرگاه n داده داشته باشیم و n عدد فرد باشد و این داده‌ها را به طور صعودی یا نزولی مرتب کنیم، بنا به تعریف میانه برابر داده وسطی است. مثلاً داده‌های آماری زیر:

۱، ۱، ۲، ۳، ۳، ۸، ۱۱، ۱۴، ۱۹، ۱۹، ۲۰

عدد ۸ که در میان واقع شده (۵ داده در چپ آن و ۵ داده در راست آن قرار دارد) میانه می‌باشد.

ب - هرگاه n داده داشته باشیم و n عدد زوج باشد در این صورت هیچ داده‌ای در وسط نیست، باز هرگاه این داده‌ها را به طور صعودی یا نزولی مرتب کنیم، بنا به تعریف، میانه برابر است با میانگین دو عددی که در وسط قرار گرفته‌اند. مثلاً در داده‌های زیر:

۲، ۵، ۵، ۶، ۷، ۱۰، ۱۵، ۲۱، ۲۱، ۲۳، ۲۳، ۲۵

در اینجا اندازه‌های ۱۵ و ۱۵ در وسط قرار گرفته‌اند (۵ داده در سمت چپ آنها و ۵ داده در سمت راست آنها قرار دارد)، لذا داریم: $m = \frac{10+15}{2} = 12.5$ هرگاه داده‌های آماری به صورت جدول فراوانی داده شده باشد، محاسبه میانه با روش خاصی انجام می‌گیرد که ما در این سطح از ذکر آن خودداری می‌کنیم.

نما

برای يك دسته داده‌های آماری، نما که با حرف M نمایش داده می‌شود داده‌ای است که بیش از سایر داده‌ها تکرار شده باشد. مثلاً در داده‌های آماری زیر:

۱، ۲، ۴، ۴، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸

رقم ۴ بیش از همه تکرار شده است؛ لذا در اینجا رقم ۴ نما می‌باشد. هرگاه داده‌ها به صورت جدول فراوانی داده شده باشد، در این صورت رده‌ای که بزرگترین فراوانی را دارد به نام رده نما خوانده می‌شود. باید توجه داشت که يك دسته داده‌های آماری ممکن است نما نداشته و یا چند نما داشته باشند.

مقیاسهای پراکندگی

از انجام محاسبات عددی بر روی داده‌های آماری اندازه‌هایی به دست می‌آید که به نام اندازه‌های توصیفی خوانده می‌شود، بخشی از آمار که از این اندازه‌ها بحث می‌کند آمار توصیفی خوانده شده است. اندازه‌های مرکزی میانگین، میانه، ... و نما یکی از مباحث آمار توصیفی است. اگرچه هر کدام از اندازه‌های مرکزی به نوبه خود مفید و حاوی مطالبی در توزیع اطلاعات هستند ولی هیچ کدام از آنها مطالبی راجع به تغییرات داده‌های آماری در اختیار ما قرار نمی‌دهند. مثلاً میانگین سه عدد ۳۰، ۴۰، ۵۰ برابر ۴۰ می‌باشد و میانگین اعداد ۱۰، ۴۰ و ۷۰ نیز برابر ۴۰ است؛ در حالی که به وضوح دیده می‌شود که تغییرات داده‌ها در حالت دوم به مراتب بیشتر از حالت اول است. چون در اندازه‌های مرکزی بخشی در باره این تغییرات نمی‌شود؛ لذا برای بررسی این تغییرات قسمتی از یکی دیگر از بخش‌های آمار توصیفی را که به نام مقیاسهای پراکندگی خوانده می‌شود مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

دامنه

تفاضل بین بزرگترین و کوچکترین داده‌های آماری به نام دامنه خوانده می‌شود. مثلاً دامنه داده‌های:

۶، ۱۱، ۱۵، ۲۱، ۲۵، ۳۲، ۴۳

برابر است با تفاضل دو عدد ۴۳ و ۶ یعنی ۳۷. اگرچه محاسبه دامنه خیلی آسان است و کم و بیش به عنوان اندازه تغییرات در آمار به کار برده می‌شود، ولی به دلایل زیر استفاده از آن در مطالعه تغییرات يك دسته داده‌های آماری کافی نیست:

۱- در محاسبه دامنه فقط دو اندازه به کار برده می‌شود و از سایر اندازه‌ها که قسمت بیشتر داده‌ها را تشکیل می‌دهند صرف نظر می‌شود.

۲- به تدریج که تعداد داده‌ها زیاد می‌شود، ممکن است دامنه به سوی عدد بزرگتری میل کند، لذا این اندازه برای مقایسه دو دسته داده‌ها که تعداد مشاهدات آنها یکی نیست مناسب نمی‌باشد.

۳- در تغییرات، دامنه يك عدد ثابت نیست، بدین معنا که اگر دو نمونه مختلف از يك دسته داده‌های آماری را مورد مطالعه قرار دهیم، دامنه تغییرات از يك دسته به دسته دیگر تغییر می‌کند.

انحراف میانگین

مثال - مطلوب است محاسبه انحراف میانگین داده‌های آماری زیر :

۸ ، ۹ ، ۱۲ ، ۱۴ ، ۱۵ ، ۱۷ ، ۱۹ ، ۲۱ ، ۲۲ ، ۲۳

برای محاسبه انحراف میانگین داده‌های بالا به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

۱- میانگین حسابی این داده‌ها را به دست می‌آوریم :

$$\bar{x} = \frac{8+9+12+14+15+17+19+21+22+23}{10} = 16$$

۲- این میانگین حسابی را به ترتیب از هر کدام از داده‌های بالا کم می‌کنیم ، عدد حاصل

به نام انحراف از میانگین یا به طور ساده انحراف آن داده خوانده می‌شود . در جدول زیر

انحرافهای داده‌های بالا نشان داده شده است :

داده‌ها	۸	۹	۱۲	۱۴	۱۵
تفاضل \bar{x} از داده‌ها	۸ - ۱۶	۹ - ۱۶	۱۲ - ۱۶	۱۴ - ۱۶	۱۵ - ۱۶
انحرافهای داده‌ها	-۸	-۷	-۴	-۲	-۱
	۱۷	۱۹	۲۱	۲۲	۲۳
	۱۷ - ۱۶	۱۹ - ۱۶	۲۱ - ۱۶	۲۲ - ۱۶	۲۳ - ۱۶
	+۱	۳	۵	۶	۷

عدد ۸ - انحراف داده ۸ ، عدد ۷ - انحراف داده ۹ ، عدد ۴ - انحراف داده ۱۲ ، ... ،

و غیره می‌باشد .

۳- میانگین قدرمطلقهای انحرافهای فوق را که به نام انحراف میانگین خوانده می‌شود

به دست می‌آوریم :

$$\text{انحراف میانگین} = \frac{|-8| + |-7| + |-4| + |-2| + |-1| + |1| + |3| + |5| + |6| + |7|}{10}$$

$$= \frac{8+7+4+2+1+1+3+5+6+7}{10} = \frac{44}{10} = 4.4$$

باتوجه به مثال بالا گوییم : تفاضل بین هر کدام از داده‌های آماری و میانگین حسابی آنها

به نام انحراف از میانگین آن داده یا به طور ساده انحراف آن داده خوانده می‌شود . به عبارت

دیگر ، هرگاه n داده x_1, x_2, \dots, x_n که میانگین حسابی آنها \bar{x} است داشته باشیم ، به

هر کدام از اندازه‌های زیر انحراف از میانگین یا به طور ساده انحراف آن داده می‌گویند :

$$x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}$$

تعریف - میانگین قدر مطلق انحرافات عددی است مخالف صفر که به نام انحراف میانگین داده‌های آماری خوانده می‌شود. به عبارت دیگر اگر d انحراف میانگین باشد داریم:

$$d = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

انحراف معیار (انحراف استاندارد)

مهمترین مقیاس برای اندازه‌گیری پراکندگی، انحراف معیار است. از این جهت برای مطالعه در تغییرات داده‌های آماری بیشتر از انحراف معیار استفاده می‌شود.

مثال - مطلوب است محاسبه انحراف معیار داده‌های آماری زیر:

۳، ۴، ۲، ۵، ۳، ۸، ۶، ۷، ۵

به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱- میانگین این داده‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۳+۴+۲+۵+۳+۸+۶+۷+۵}{۹} = \frac{۴۳}{۹} \approx ۵$$

۲- در اینجا به جای قدر مطلقهای انحراف، مربعات آنها را در نظر می‌گیریم. درمربع کردن انحرافات علامت منفی از بین رفته در نتیجه مربع انحرافات همیشه اعداد مثبت خواهند بود:

$$(۳-۵)^2, (۴-۵)^2, (۲-۵)^2, \dots, (۵-۵)^2$$

بعضی اوقات، قسمت ۲ را با استفاده از جدول زیر محاسبه می‌کنند:

داده‌های آماری	۳	۴	۲	۵	۳	۸	۶	۷	۵
انحرافات	-۲	-۱	-۳	۰	-۲	۳	۱	۲	۰
مربع انحرافات	۴	۱	۹	۰	۴	۹	۱	۴	۰

۳- مجموع مربعات انحرافات را حساب می‌کنیم:

$$۴+۱+۹+۰+۴+۹+۱+۴+۰=۳۲$$

۴- مجموع مربعات انحرافات را بر تعداد کل داده‌ها تقسیم کرده آن را با s^2 نمایش می‌دهیم:

$$s^2 = \frac{۳۲}{۹}$$

۵- ریشه دوم مثبت s^2 همان انحراف معیار است:

$$s = \sqrt{\frac{۳۲}{۹}} = \frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$$

در زیر، این مطالب به عنوان دستورالعمل محاسبه انحراف معیار خلاصه شده است:

۱- میانگین داده‌های آماری را به دست می‌آوریم :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

۲- مجموع مربعات انحرافات که به طور ساده مجموع مربعات خوانده می‌شود حساب

می‌کنیم :

$$(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2$$

۳- مجموع مربعات را بر تعداد کل داده‌های آماری یعنی n تقسیم می‌کنیم ؛ عدد حاصل

را معمولاً با s^2 نمایش داده آن را پراش می‌خوانیم :

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

۴- قدر مطلق جذر این عبارت را که به نام انحراف معیار (انحراف استاندارد) خوانده

می‌شود ، به دست می‌آوریم :

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

شاخصها

شاخصها تغییرات داده‌های آماری را که بیشتر جنبه اقتصادی یا اجتماعی دارند ، نسبت به زمان نشان می‌دهند ؛ به عبارت دیگر ، شاخصها تصور روشنی از افزایش هزینه زندگی ، ازدیاد جمعیت ، ازدیاد محصول ، ... را در سالهای مختلف نسبت به يك سال معین که سال پایه نامیده می‌شود ، نشان می‌دهند .

مثال - در جدول زیر بهای يك کیلوان در ۴ سال متوالی نوشته شده است . مطلوب است

شاخص بهای نان نسبت به سال ۱۳۴۹ :

سالها	۱۳۴۹	۱۳۵۰	۱۳۵۱	۱۳۵۲
قیمت ۱ کیلو گرم نان بر حسب ریال	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳

بهای يك کیلو نان را در هر سال بر بهای يك کیلوان در سال ۱۳۴۹ تقسیم نموده ، خارج قسمت را در صد ضرب می‌کنیم ، اعداد حاصل شاخص بهای نان را در هر سال نسبت به سال ۱۳۴۹ نشان می‌دهد .

نمونه

۱- برای هر کدام از دسته داده‌های زیر ، میانگین ، میانه و نمارا حساب کنید :

۲، ۵، ۹، ۱۱، ۱۳
 ۱، ۳، ۳، ۵، ۶، ۶
 ۴، ۱۰، ۲، ۸، ۴، ۱۴، ۱۰، ۱۲، ۸
 ۳، ۶، ۲، ۵، ۳، ۸، ۶، ۷، ۹
 ۱۳، ۱۹، ۱۱، ۱۷، ۱۳، ۲۳، ۱۹، ۲۱، ۱۷
 —۱۰، ۲، —۲، ۱۲، —۱، ۴، ۲، ۳، —۱

۲- دو دسته داده‌ها به صورت دوجداول در زیر داده شده است؛ میانگین این دودسته

داده‌ها را جداگانه حساب کنید:

رده‌های داده‌ها	فراوانی	رده‌های داده‌ها	فراوانی
۳۳—۳۷	۱۰	۱۶—۲۱	۱۵
۳۸—۴۲	۱۰	۲۲—۲۷	۱۶
۴۳—۴۷	۵۱	۲۸—۳۳	۵
۴۸—۵۲	۲۰	۳۴—۳۹	۵

۳- ۹ معلم يك برگ امتحانی را نمره داده‌اند، به خاطر اختلاف سلیقه معلمین در نمره دادن، قرار شده است که میانگین وزنی نمرات داده شده به عنوان نمره برگ به دست آورده شود؛ در زیر جدول نمرات با فراوانی آنها تنظیم شده است، نمره برگ را تعیین کنید:

نمره داده شده	۱۶/۶	۱۶/۲	۱۶	۱۶/۴	۱۷/۲
فراوانی آن نمره (نفر)	۲	۳	۱	۲	۱

۴- در يك تجربه آماری ۱۲۰ مشاهده که هر مشاهده يك عدد صحیح مثبت است به دست آمده است که هیچ کدام صفر نمی باشد؛ میانگین این اعداد ۶۰/۵ می باشد. آیا ممکن است یکی از مشاهدات ۱۰ باشد؟

۵- در يك تصاعد حسابی جمله اول ۳، قدر نسبت ۲ و تعداد جملات ۹ است؛ میانگین و میانه جمله‌ها را حساب کنید؛ آیا در جمله‌های این تصاعد که همان داده‌های آماری می باشند نما وجود دارد؟

۶- در يك تصاعد هندسی جمله اول ۳، قدر نسبت ۲ و تعداد جمله‌ها ۹ است؛ میانگین و میانه جمله‌ها را پیدا کنید. آیا در این دسته داده‌های آماری نما وجود دارد؟

۷- میانگین حسابی حقوق سالانه ۹ نفر برابر ۶۰۰۰۰ ریال است؛ اگر يك حقوق ۴۲۰۰۰ ریالی اضافه شود میانگین چه تغییری می کند؟

۸- هزینه ۲۰ روز مسافرت يك دسته دانش آموز در جدول زیر نوشته شده است:

هزینه روزانه	مجموع هزینه به ریال	تعداد روزهای مسافرت
۱۸۹۰	۹۴۵	$\frac{1}{2}$
۳۳۶	۸۴۰	$\frac{1}{2}$
۴۹۰	۱۴۷۰	۳
۶۶۵	۶۶۵	۱
۲۸۰	۲۲۴۰	۸
۸۴۰	۴۲۰۰	۵
۴۵۰۱	۱۰۳۶۰	۲۰

کدام نتیجه زیر حقیقی تر است ؟

$$\text{میانگین خرج روزانه} = \frac{۴۵۰۱}{۲۰} = ۲۲۵/۰۵$$

$$\text{میانگین خرج روزانه} = \frac{۱۰۳۶۰}{۲۰} = ۵۱۸$$

$$\text{میانگین خرج روزانه} = \frac{۶۶۵ + ۱۴۷۰}{۲} = ۱۰۶۷/۵$$

(این دو عدد ، دو عدد میانی هستند)

۹ - مطلوب است محاسبه میانگین، پراش و انحراف معیار هر دسته از داده های آماری زیر :

۱۵ ، ۱۷ ، ۱۸ ، ۱۹ ، ۲۵ ، ۳۰ ، ۳۸ ، ۴۰

۱۱ ، ۱۲ ، ۱۱ ، ۱۳ ، ۱۲ ، ۱۵ ، ۲۰ ، ۱۱ ، ۱۲

۱۳۰ ، ۱۲ ، ۱۵ ، ۱۹ ، ۱۸

۳ ، ۶ ، ۲ ، ۵ ، ۳ ، ۸ ، ۶ ، ۷ ، ۹

۱۰ - در جدول زیر ، بهای گوشت و برنج در سالهای ۴۸ تا ۵۳ نوشته شده است :

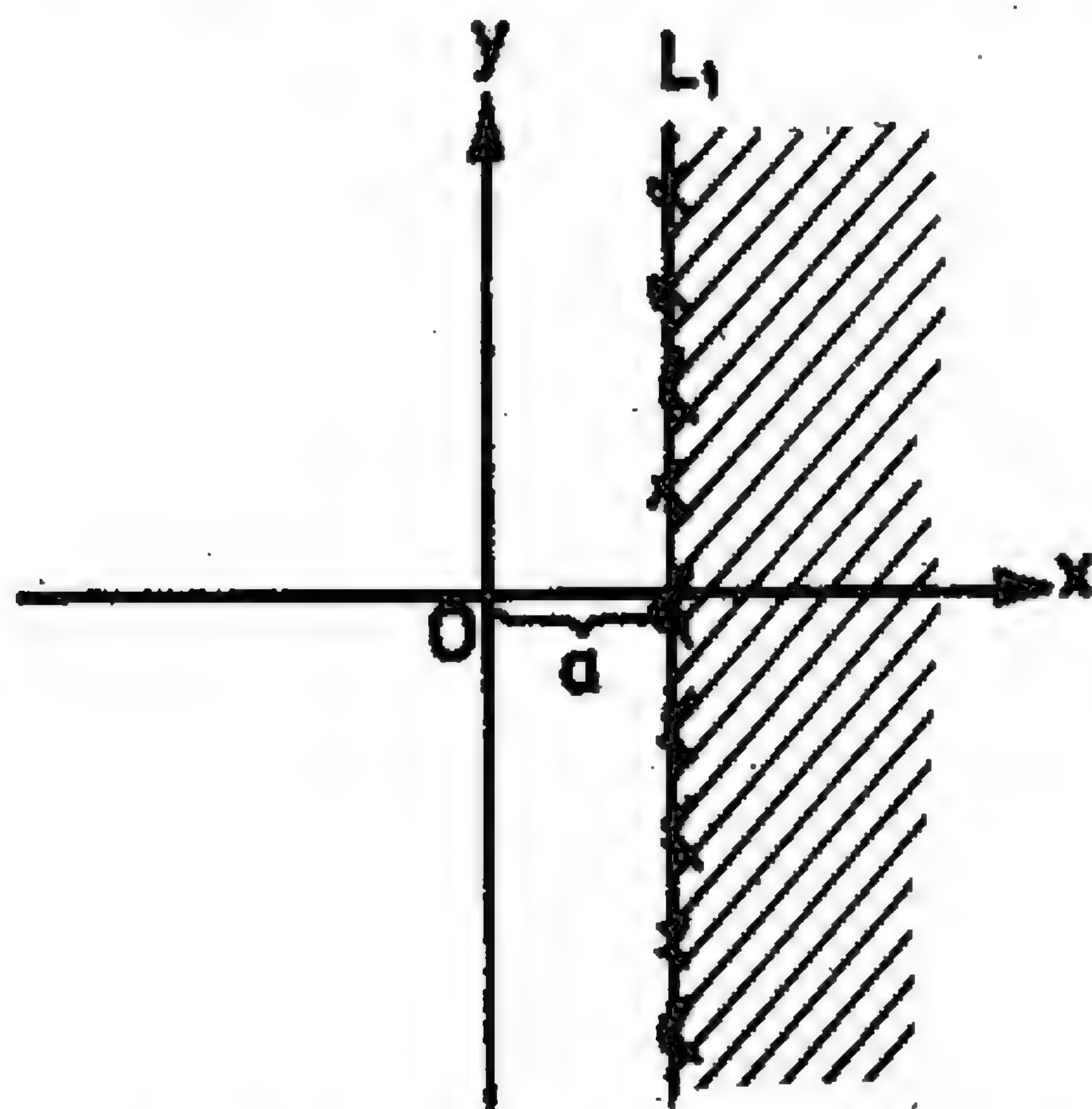
مطلوب است شاخص بهای گوشت و برنج در هر سال نسبت به سال ۱۳۴۸ و همچنین افزایش بهای هر کدام نسبت به آن سال :

سالها	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳
برنج	۳۲	۳۳	۳۵	۳۵	۴۵	۶۰
گوشت	۱۰۰	۱۰۰	۱۱۰	۱۲۰	۱۴۰	۱۵۰

نامعادلات خطی

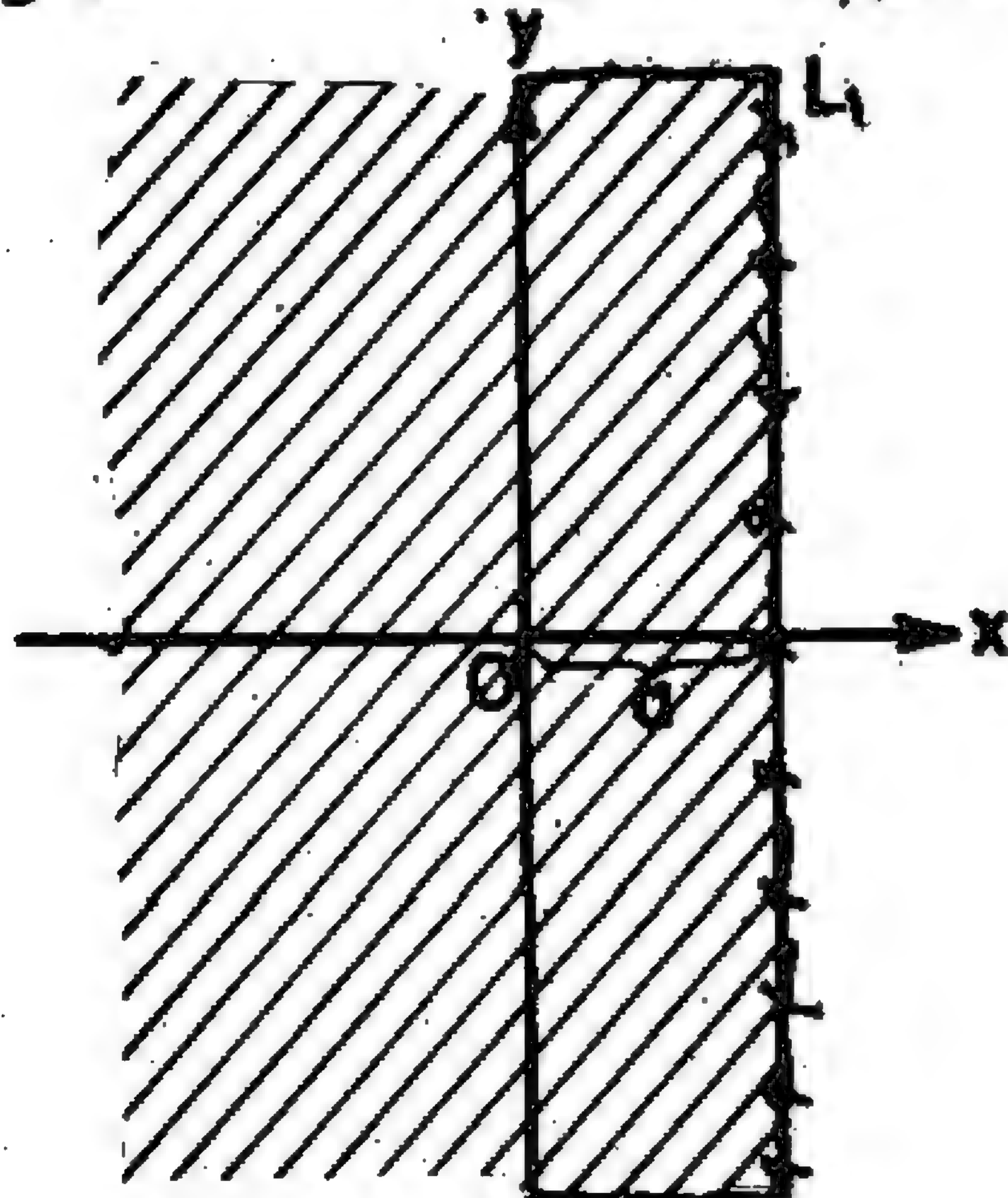
نمودار هر خط، صفحه مختصات را به سه ناحیه تقسیم می کند. مثلاً نمودار $x = a$ صفحه مختصات را به سه ناحیه زیر تقسیم می کند:

الف: نیم صفحه طرف راست L_1 که طول هر نقطه آن از a بیشتر است به عبارت دیگر،



برای هر نقطه از این نیم صفحه داریم $x > a$. برعکس نقطه نظیر هر زوج از اعداد حقیقی که متعلق به مجموعه جواب گزاره $x > a$ باشد در این نیم صفحه است (قسمت هاشور خورده) برای این که مشخص کنیم که این نیم صفحه شامل L_1 نیست روی L_1 علامتهای x می گذاریم این علامتگذاری را در آینده نیز به کار خواهیم برد.

ب - نیم صفحه طرف چپ L_1 که شامل مبدأ مختصات نیز می باشد، هر نقطه از این نیم صفحه



طولش از a کوچکتر است. به عبارت دیگر، برای هر نقطه از این نیم صفحه داریم $x < a$. برعکس نقطه نظیر هر زوج از عددهای حقیقی که متعلق به مجموعه جواب گزاره‌نمای $x < a$ باشد در این نیم صفحه واقع است. (قسمت هاشور خورده)

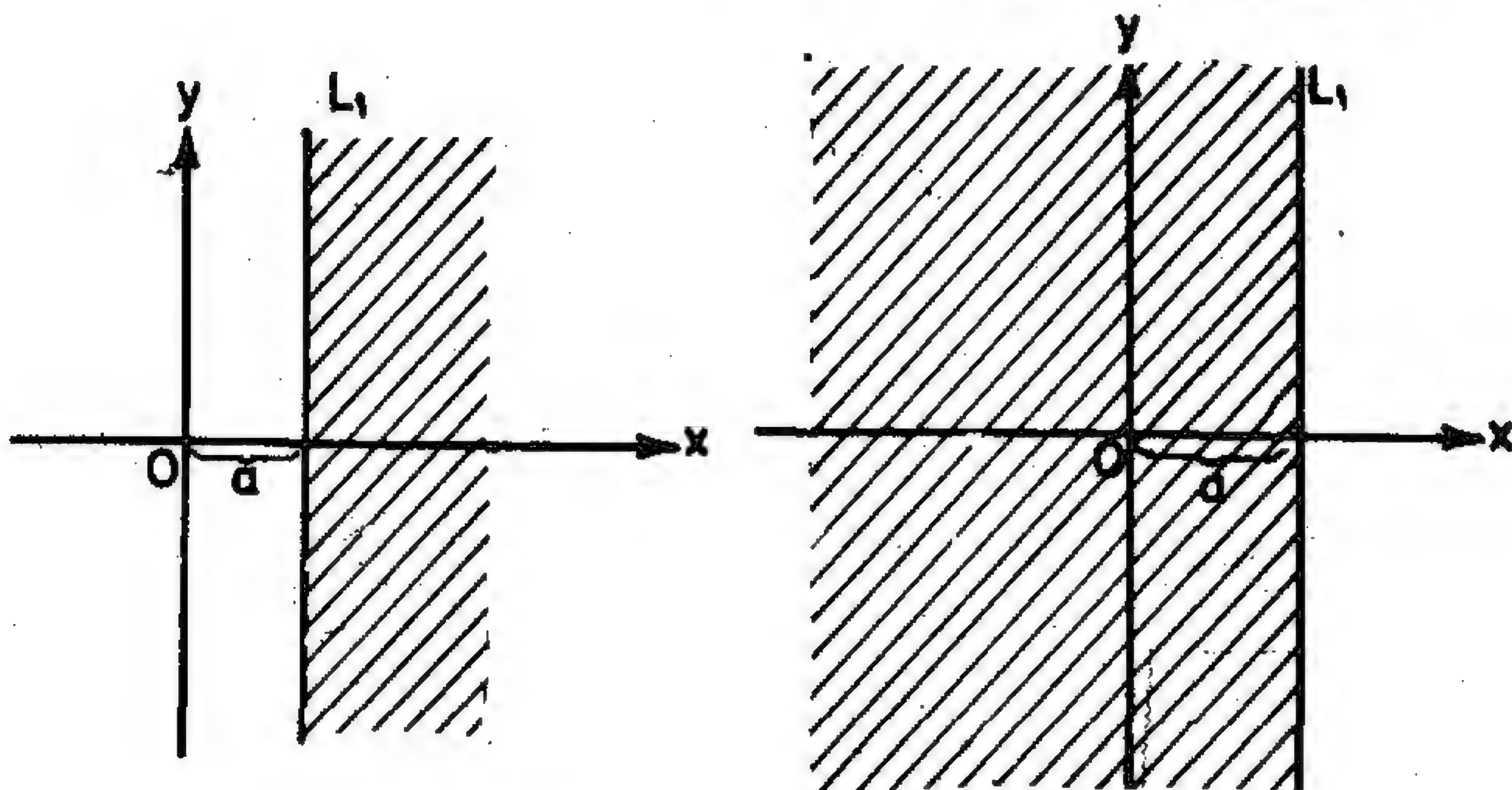
هر یک از نیم صفحه‌های سمت راست یا سمت چپ L_1 که شامل خود L_1 نیست به نام نیم صفحه باز خوانده می‌شود.

ج - مجموعه نقاطی از صفحه که روی L_1 واقع است و مختصات آنها در $x = a$ صدق می‌کند. L_1 مرز دو نیم صفحه خوانده می‌شود. طبق آنچه گفته شد داریم:

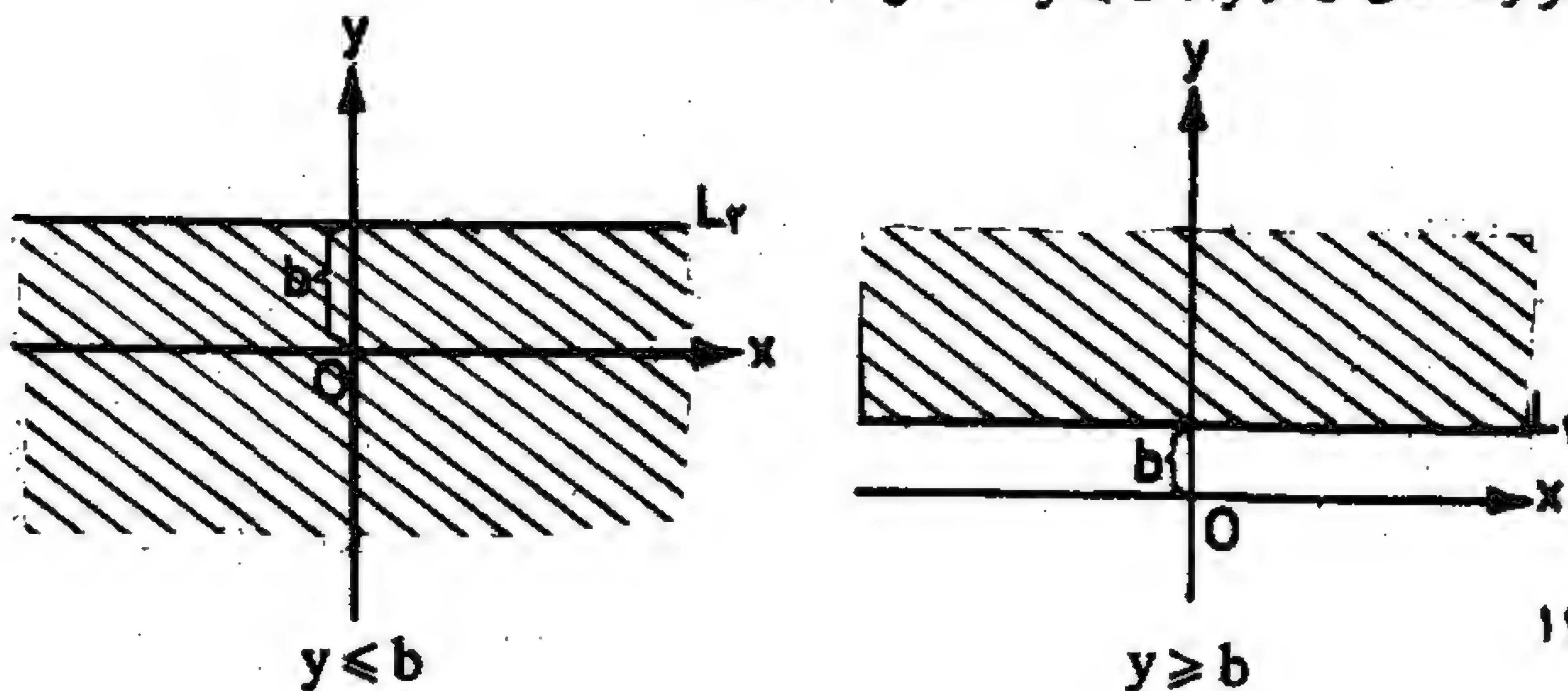
$$R^2 = \{ (x,y) \mid x=a \vee x < a \vee x > a \}$$

برای هر $a \in \mathbb{R}$ ، نمودار هر یک از رابطه‌های $\{ (x,y) \mid x \leq a \}$ و $\{ (x,y) \mid x \geq a \}$

را که شامل خط $x = a$ نیز می‌باشند یک نیم صفحه بسته می‌خوانند. در زیر نمودارهای این دو رابطه رسم شده است.



بنا بر این هر نقطه از نیم صفحه بسته طرف راست L_1 در گزاره‌نمای $x \geq a$ و هر نقطه از نیم صفحه بسته سمت چپ L_1 در گزاره‌نمای $x \leq a$ صدق می‌کند. در زیر نیم صفحه‌های حاصل از گزاره‌نماهای $y \leq b$ و $y \geq b$ مشخص شده‌اند.



در حالت کلی خط $ax + by = c$ صفحه مختصات را به نیم صفحه‌های باز و بسته زیر تقسیم می‌کند:

۱- نیم صفحه‌های باز:

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge ax + by > c\} \quad ; \quad \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge ax + by < c\}$$

۲- نیم صفحه‌های بسته:

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge ax + by \geq c\} \quad ; \quad \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge ax + by \leq c\}$$

معمولا برای سادگی، فقط به نوشتن گزاره‌نماهای آنها اکتفا می‌شود:

$$(۱) \text{ نیم صفحه‌های باز } ax + by < c \quad \text{و} \quad ax + by > c$$

$$(۲) \text{ نیم صفحه‌های بسته } ax + by \leq c \quad \text{و} \quad ax + by \geq c$$

روابط (۱) و (۲) را با معادلات خطی می‌نامند.

مثال ۱- مطلوب است رسم نمودار رابطه زیر در مجموعه اعداد درست

$$D = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, y - x > -2\}$$

حل- چند زوج از مجموعه جواب گزاره نمای $y - x > -2$ در زیر مشخص شده

است.

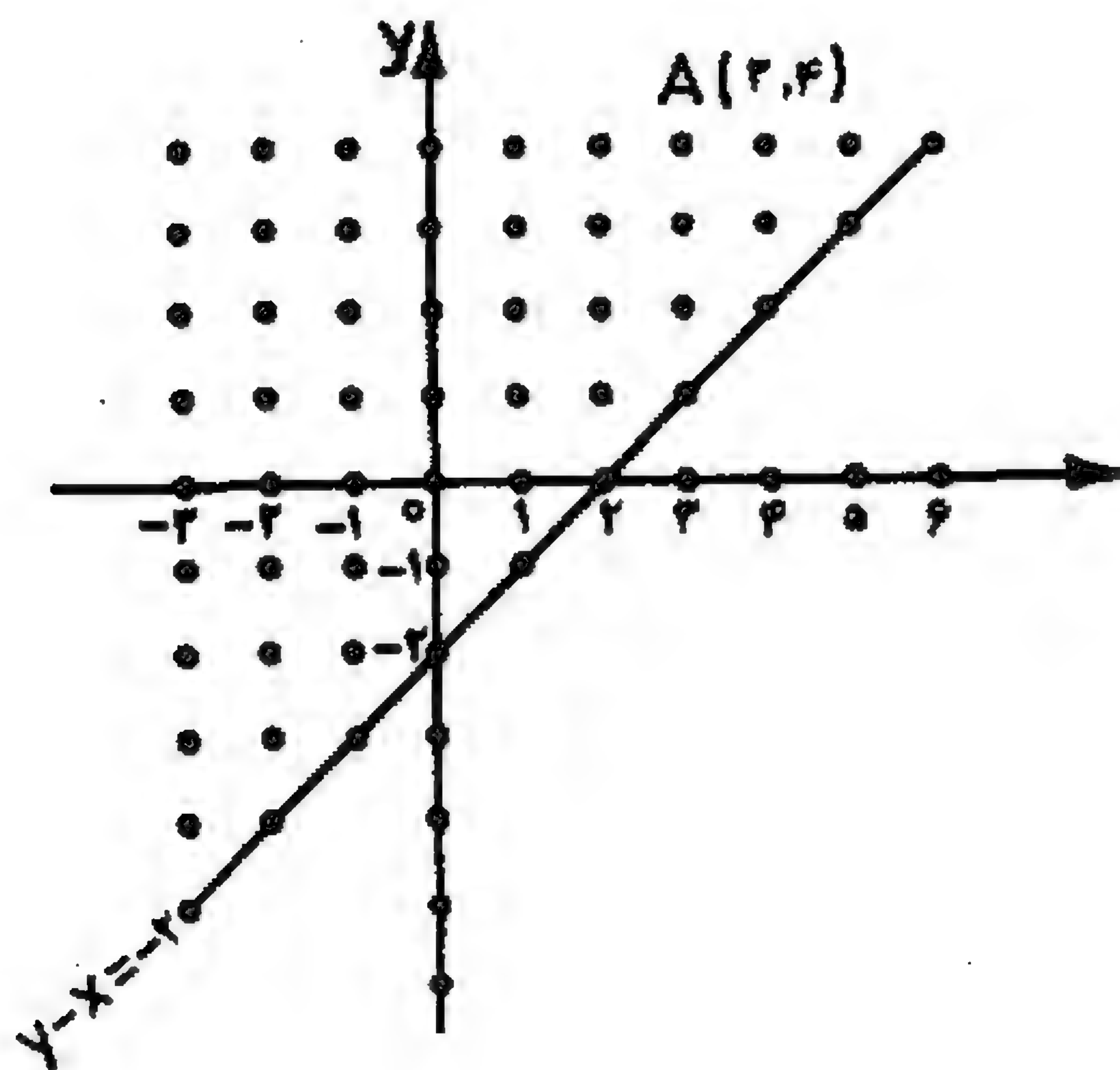
$$\dots, (-2, 1), (-2, 0), (-2, -1), (-2, -2), (-2, -3), \dots$$

$$\dots, (1, 0), \dots, (-1, -1), (-1, -2), \dots$$

نمودار D در شکل بعد نمایش داده شده است. در اینجا دیده می‌شود نقاطی از صفحه

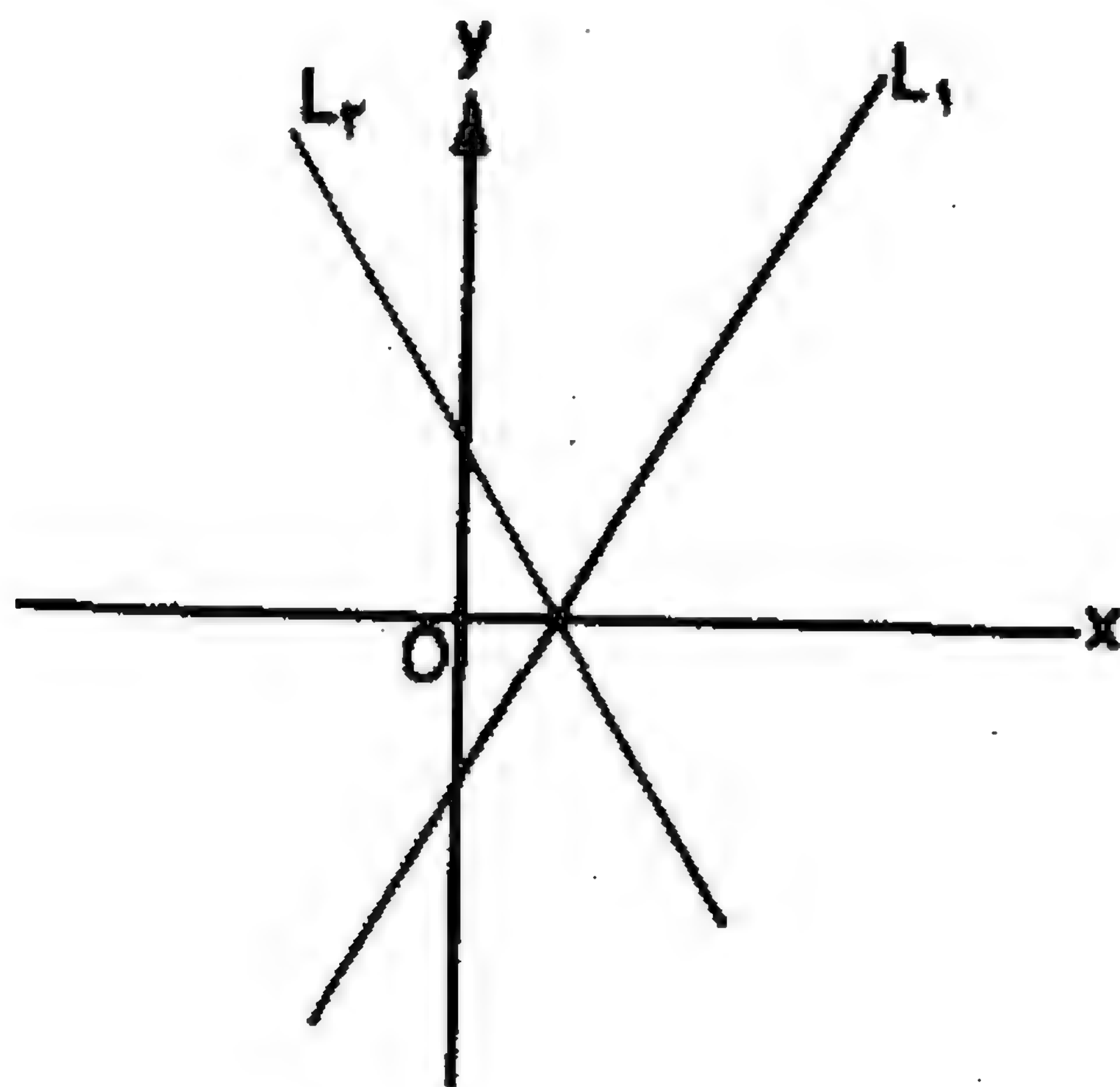
که در یک طرف نمودار $y - x = -2$ واقع شده و شامل مبدأ مختصات می‌باشند تقاضی عرض

و طول آنها از -2 بزرگتر است. مثلا چون $4 - 3 > -2$ ، نقطه $A(3, 4)$ روی نمودار



D واقع است . بنابراین مجموعه تمام نقاطی از صفحه واقع در ناحیه‌ای که شامل مبدأ مختصات است نمودار D می‌باشد .

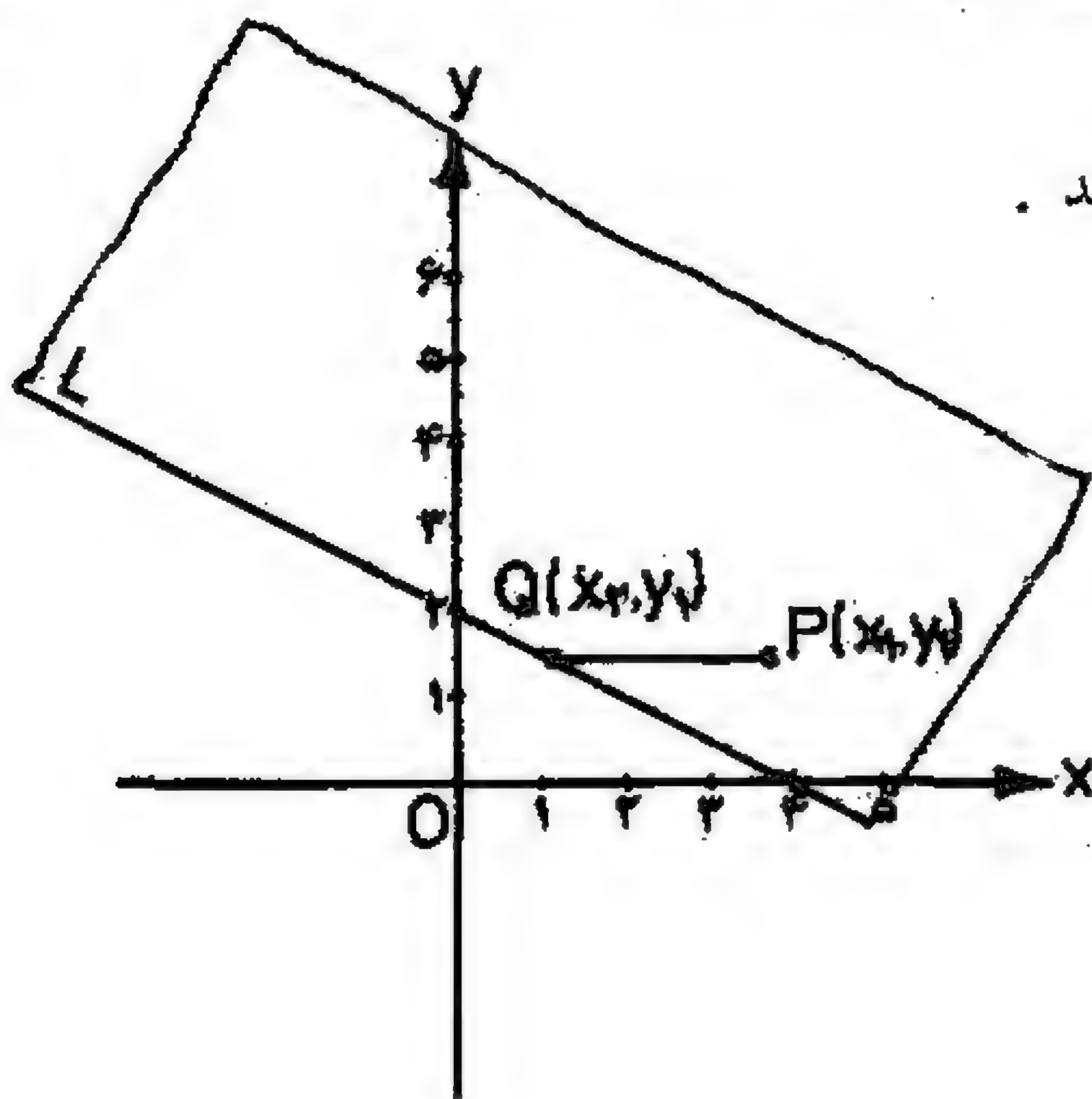
تذکر - گاهی اوقات به جای آن که گفته شود ناحیه‌ای از صفحه که شامل مبدأ مختصات است نمودار رابطه یا جواب نامعادله است گفته می‌شود نقاط بالا و سمت چپ L_1 یا نقاط بالا و سمت راست L_2 جواب مسئله می‌باشد . که L_1 و L_2 مرزهای نیم صفحه‌ها هستند .



دستور رسم نمودار نامعادلات در حالت کلی - رابطه S در مجموعه اعداد حقیقی با گزاره نمای (نامعادله) زیر تعریف شده است : a و b و c اعداد حقیقی هستند .

$$ax + by \geq c$$

نمودار S را مشخص کنید .



- الف - ابتدا خط $ax + by = c$ را رسم می‌کنیم فرض کنیم L نمایش این خط باشد .
 ب - نقطه دلخواه $P(x_1, y_1)$ را بالا و طرف راست L انتخاب کرده ، از این نقطه

خطی موازی محور x ها می کشیم تا L را در نقطه $Q(x_p, y_p)$ قطع کند ، حال مختصات دو نقطه P و Q را با هم مقایسه می کنیم . این دو نقطه هم عرض بوده ولی طول P بزرگتر از Q است .

$$x_p > x_q$$

اگر فرض کنیم $a > 0$ آن گاه داریم :

$$ax_p > ax_q$$

به طرفین این نامساوی جمله by_p را اضافه می کنیم می شود :

$$ax_p + by_p > ax_q + by_q \quad (1)$$

ولی نقطه $Q(x_q, y_q)$ روی خط $ax + by = c$ واقع است پس داریم : $ax_q + by_q = c$.
بنابراین نامساوی (1) به صورت زیر نوشته می شود .

$$ax_p + by_p > c$$

یعنی مختصات نقطه P که در بالا و سمت راست L واقع شده است در نامعادله $ax + by \geq c$ صدق می کند و یا زوج (x_p, y_p) عضوی از رابطه S است . چون P يك نقطه اختیاری است ، پس تمام نقاط صفحه که در بالا و سمت راست L قرار دارند روی نمودار S واقع هستند . روشن است که در اینجا خود L نیز جزء جواب است .

به همین ترتیب می توان نشان داد که در این حالت اگر نقطه ای از صفحه پایین L و طرف چپ آن باشد به S تعلق ندارد . یعنی مختصات آن در نامعادله $ax + by \geq c$ صدق نمی کند . مثلاً مبدأ که در طرف چپ L قرار دارد مختصات آن در $ax + by \geq c$ صدق نمی کند . یعنی مبدأ مختصات و تمام نقاطی که با این نقطه در يك طرف L هستند جواب نمی باشند .
اگر $a < 0$ ، جواب به چه صورت خواهد بود ؟

از این موضوع برای تعیین نقاطی از صفحه که مختصات آنها در نامعادله $ax + by \geq c$ صدق می کند استفاده کرده به ترتیب زیر عمل می کنند .

- ابتدا نمودار گزاره نما (معادله) : $ax + by = c$ را در صفحه مختصات رسم می کنند .
- مختصات يك نقطه از صفحه را که معمولاً ، برای سهولت ، مبدأ مختصات انتخاب می شود در گز - جای $ax + by \geq c$ قرار می دهند . اگر این نقطه جواب بود ، آن گاه نیم صفحه بسته ای که شامل نقطه است نمودار نامعادله $ax + by \geq c$ خواهد بود . اگر این نقطه جواب نباشد ، آن گاه نیم صفحه بسته ای که شامل این نقطه نیست جواب خواهد بود .
- در حالتی که $c = 0$ ، داریم : $ax + by \geq 0$. در این صورت برای پیدا کردن مجموعه جواب نقطه ای غیر از مبدأ انتخاب می کنند . برای سادگی معمولاً این نقطه را روی یکی از محورها انتخاب می نمایند .

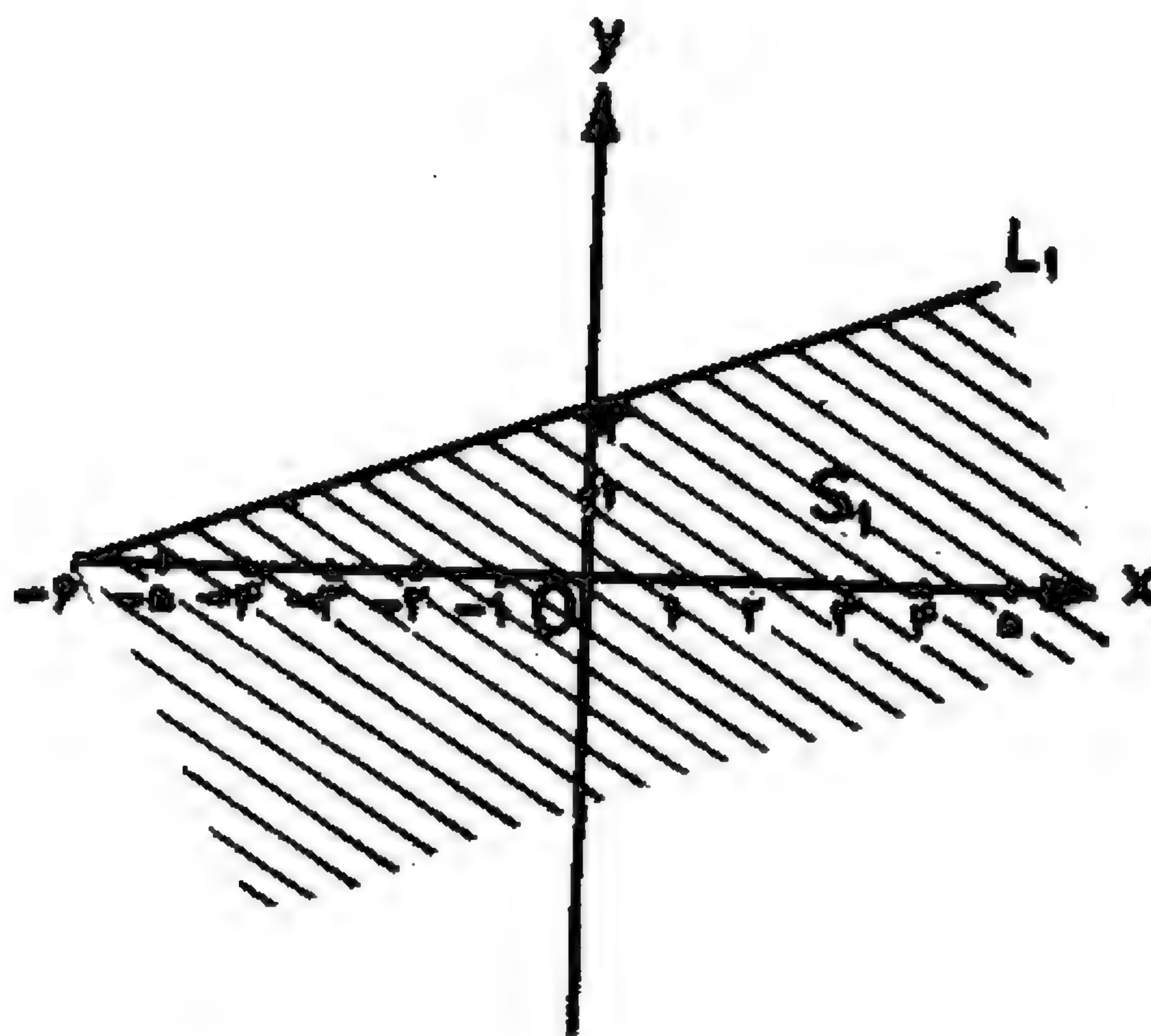
مثال ۱ - مطلوب است رسم نمودار رابطه S_1 در مجموعه اعداد حقیقی که با نامعادله زیر مشخص شده است .

$$3y - x \leq 6 \quad (1)$$

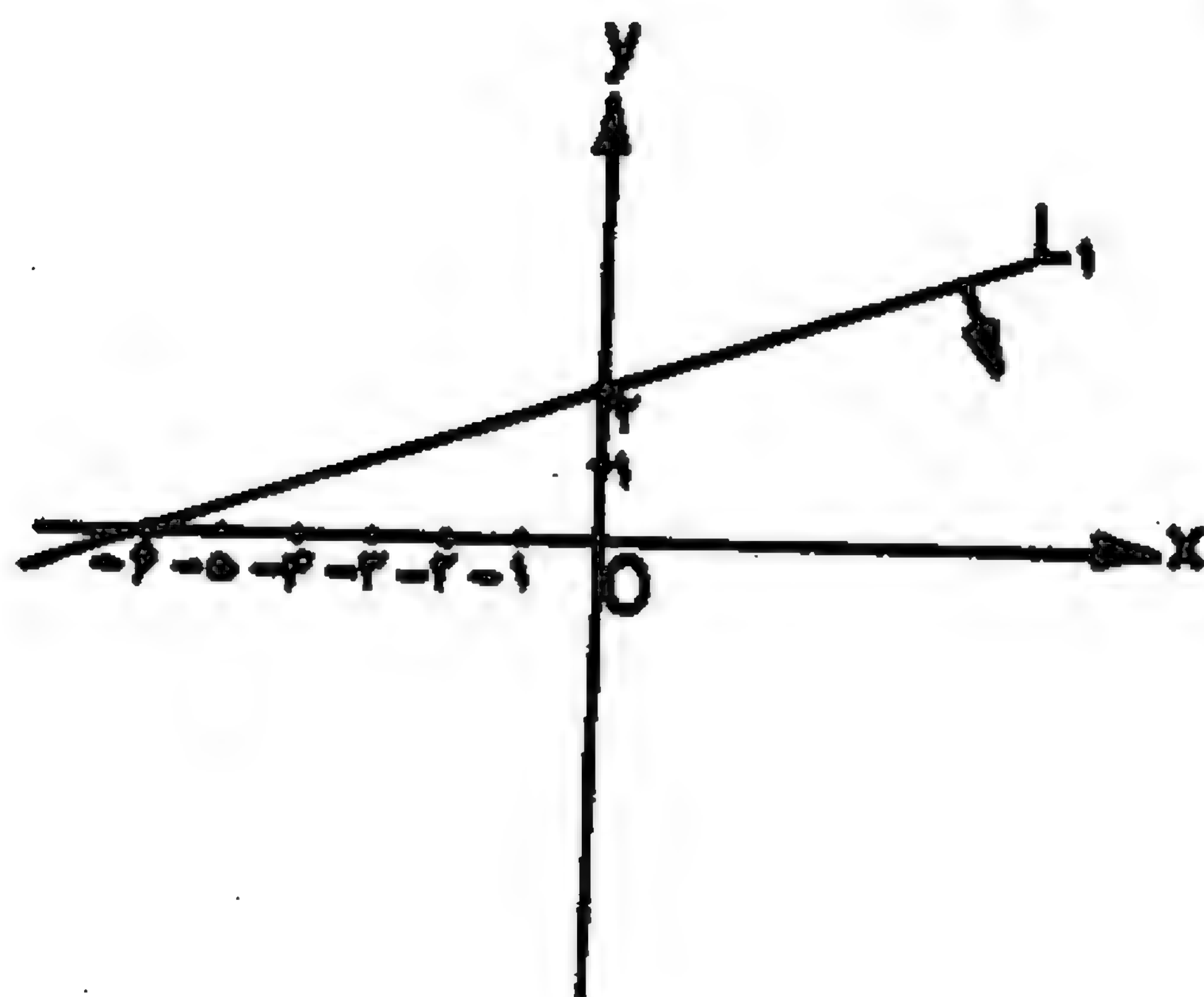
واضح است که :

$$S_1 = \{(x, y) | 3y - x \leq 6\}$$

همان طور که گفته شد ، ابتدا خط $3y - x = 6$ را که به L_1 نشان داده می شود رسم می کنیم



سه مختصات نقطه $(0, 0)$ را در گزاره نمای (۱) قرار می دهیم : $0 - 0 \leq 6$. چون حاصل يك گزاره درست است نیم صفحه بسته ای که شامل $(0, 0)$ می باشد نمودار S_1 است .
تذکر - گاهی اوقات برای جلوگیری از شلوغ شدن شکل ، مجموعه جواب را با کشیدن يك پیکان ، مطابق شکل ، نمایش می دهند .

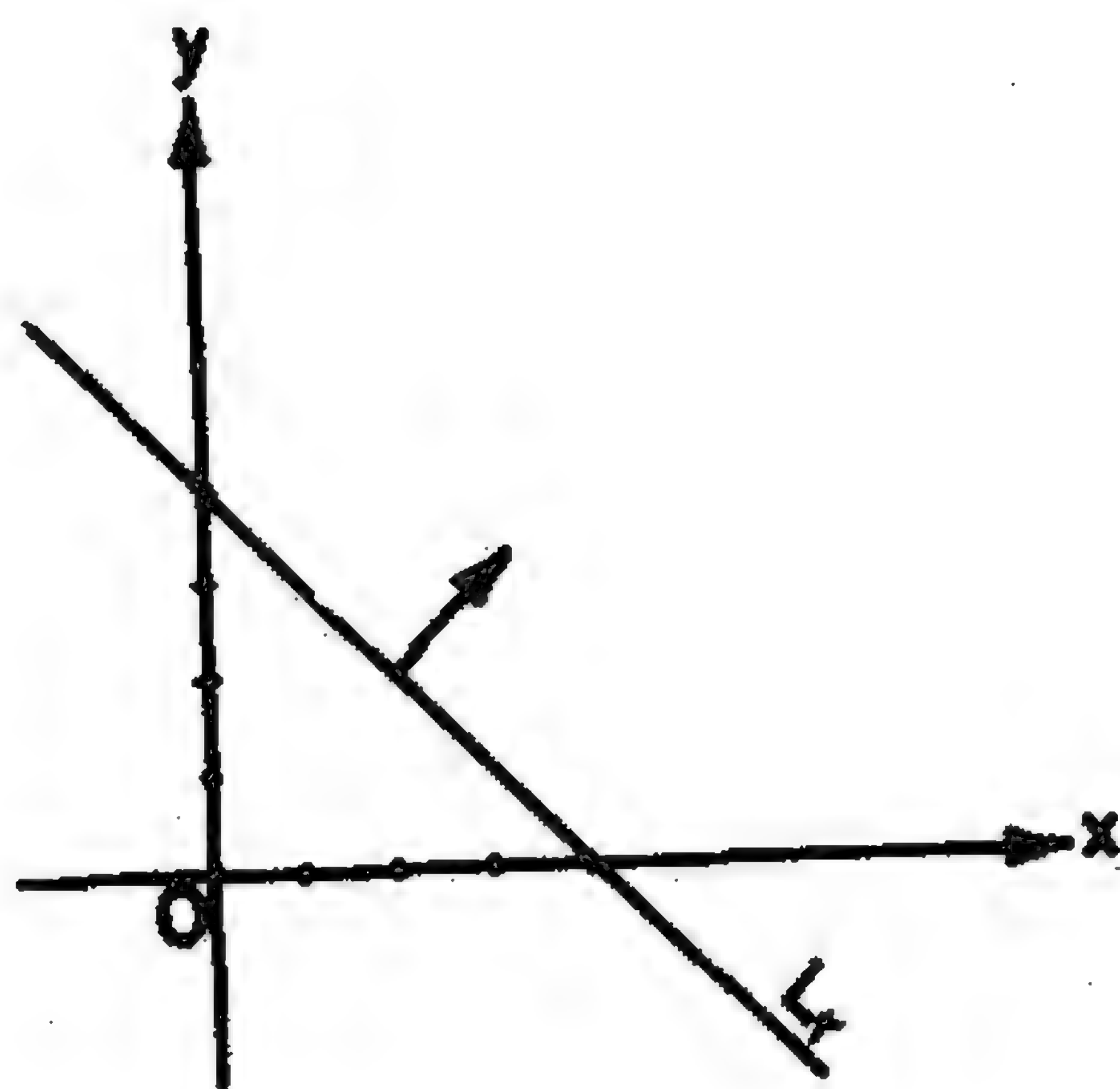
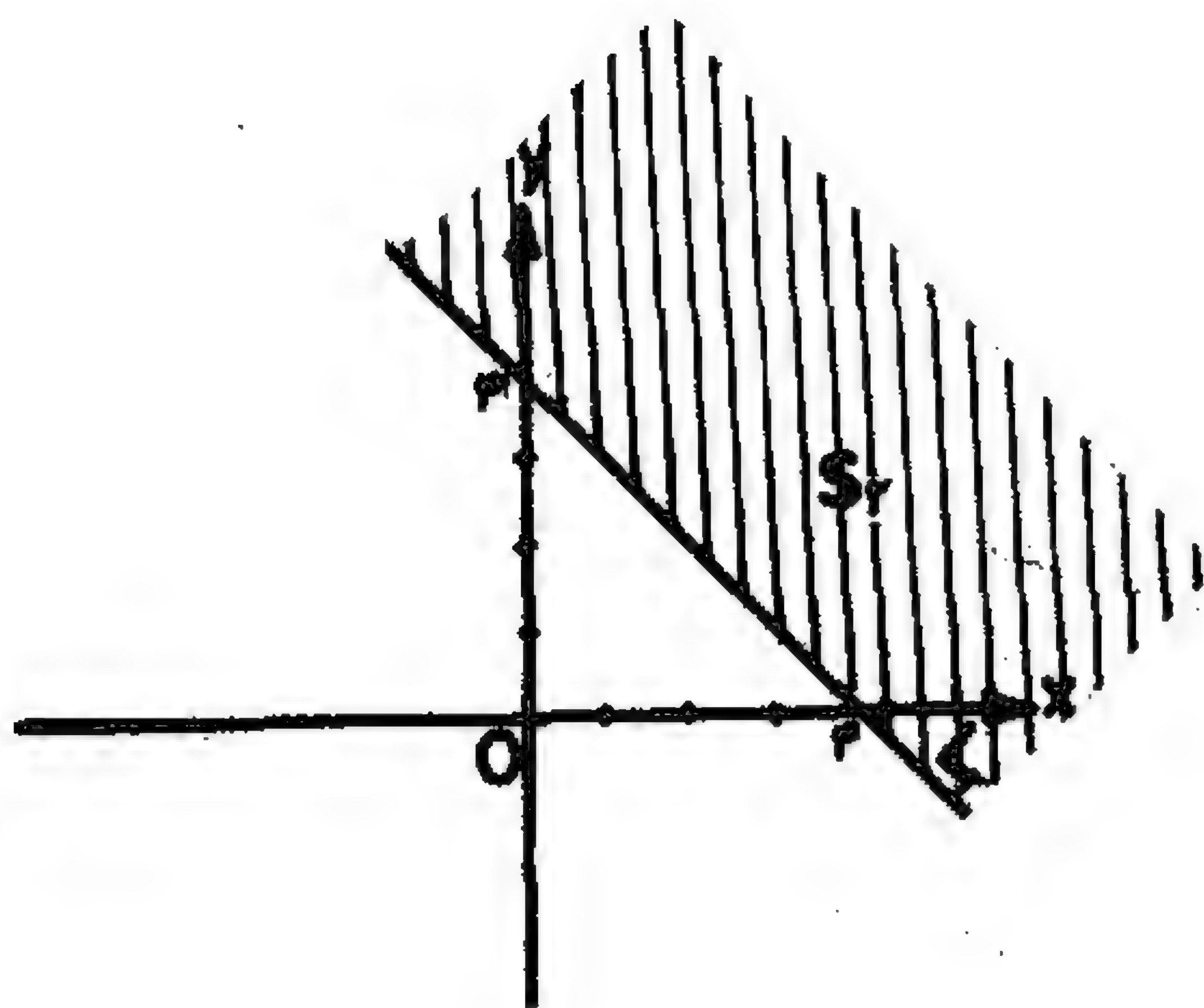


مثال ۲ - مطلوب است رسم نمودار رابطه S_2 در مجموعه اعداد حقیقی که با نامعادله

زیر مشخص شده است .

$$x + y \geq 4 \quad (۴)$$

ابتدا خط $x + y = 4$ را که به L_4 نشان می‌دهیم رسم کرده سپس مختصات مبدأ را در (۴) قرار می‌دهیم . گزاره نادرست $0 + 0 \geq 4$ به دست می‌آید . بنابراین، همان‌طور که در شکلها نیز دیده می‌شود ، جواب شامل مبدأ مختصات نیست .

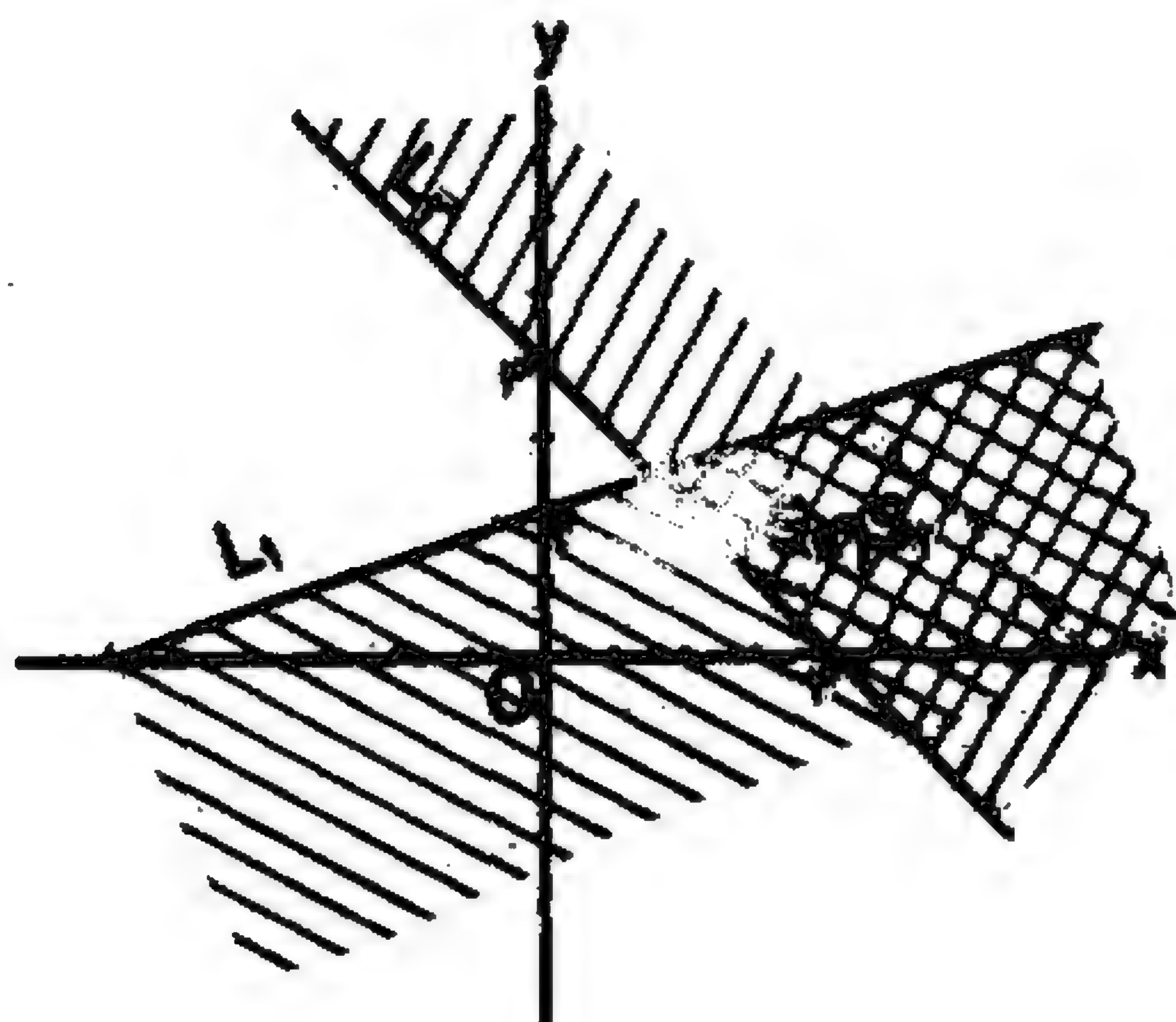
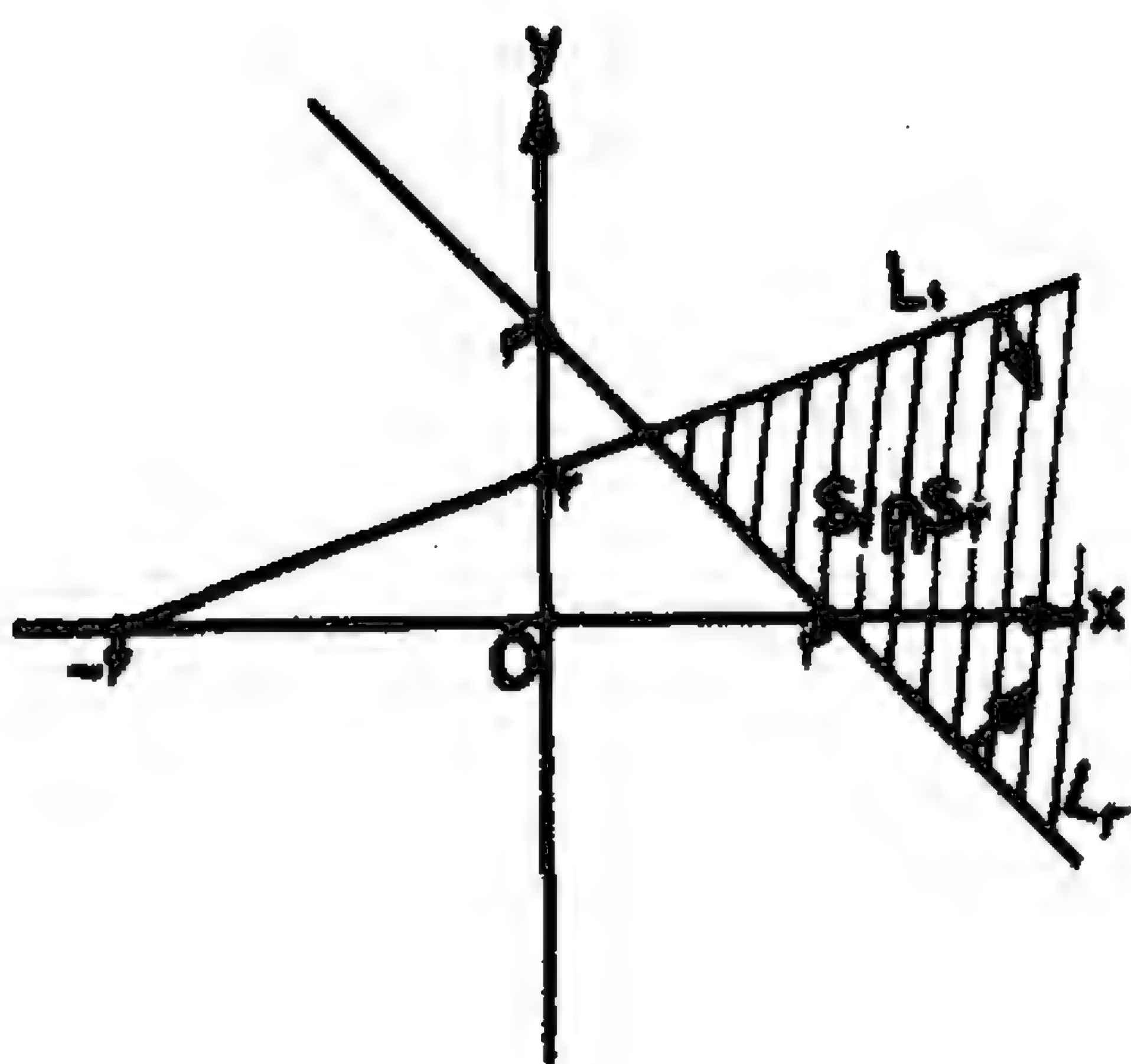


مثال ۳ - مطلوب است رسم نمودار S ، در مجموعه اعداد حقیقی که با دستور زیر مشخص شده است .

$$S = S_1 \cap S_2 \quad (S_1 \text{ و } S_2 \text{ به ترتیب رابطه‌های مثالهای ۱ و ۲ هستند})$$

واضح است که در اینجا گزاره نمای داده شده عبارت است از :

$$4y - x \leq 6 \wedge x + y \geq 4$$



که ما برای سادگی این گزاره نما را به صورت نامعادلات :

$$\begin{cases} 3y - x \leq 6 & (1) \\ x + y \geq 4 & (2) \end{cases}$$

نوشته آن را يك دستگاه نامعادلات خطی می‌خوانیم. این طرز نوشتن را برای تعداد بیشتری گزاره نما نیز در آینده به کار خواهیم برد. نمودار $S_1 \cap S_2$ و یا نمودار این دستگاه نامعادلات شامل نقاطی از صفحه است که مختصات آنها هم در S_1 و هم در S_2 صدق کند. با توجه به نمودارهای مثالهای ۱ و ۲، نمودار خواسته شده در صفحه قبل نشان داده شده است.

مثال ۴ - مطلوب است رسم نمودار رابطه S ، در مجموعه اعداد حقیقی که با دستورهای زیر مشخص شده است.

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$$

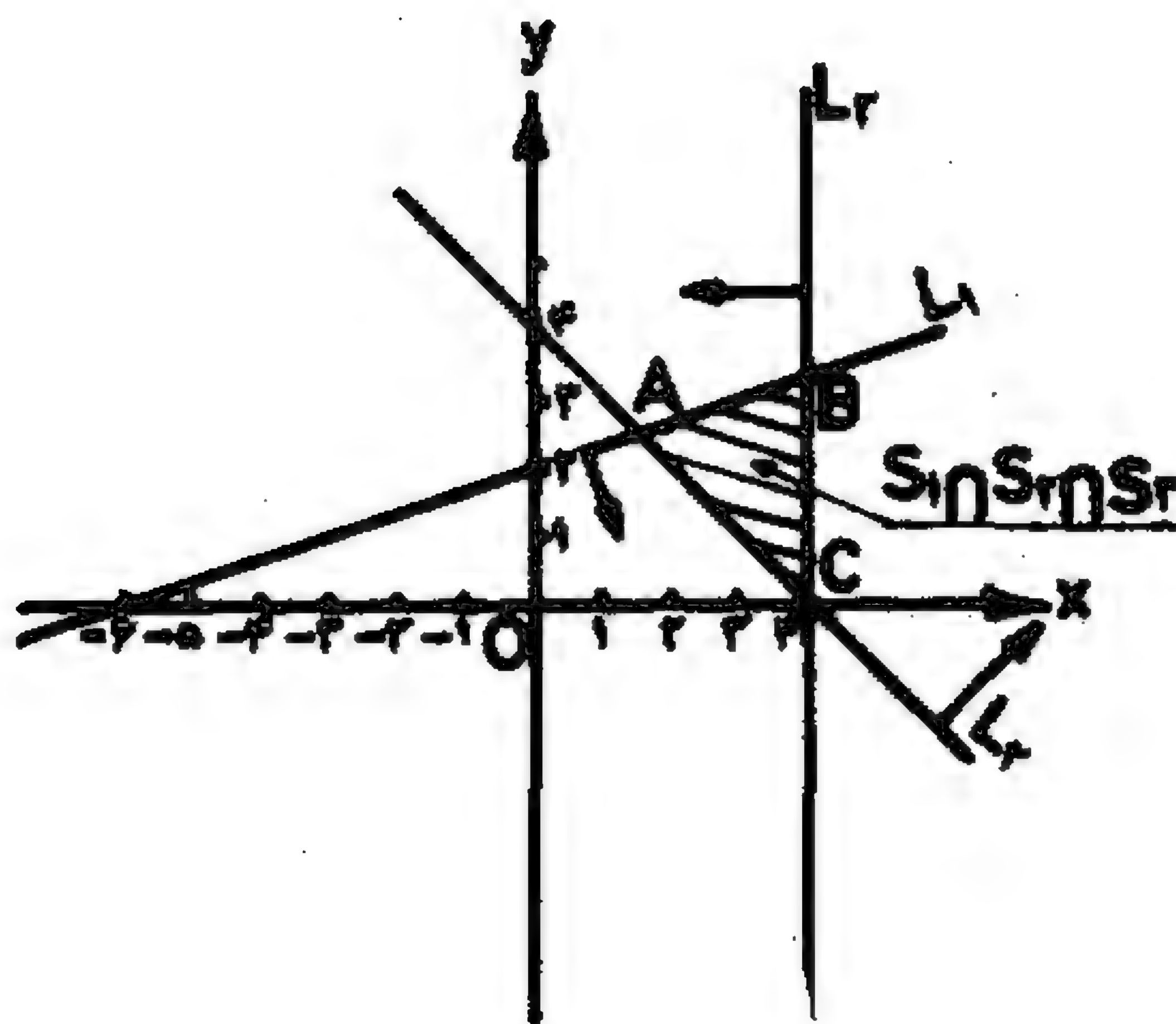
که در آن S_1 و S_2 رابطه‌های مثالهای ۱ و ۲ بوده و $S_3 = \{(x, y) | x \leq 4\}$ می‌باشد در اینجا باید نمودار رابطه :

$$S = \{(x, y) | (3y - x \leq 6) \wedge (x + y \geq 4) \wedge x \leq 4\}$$

را رسم کنیم که آن را، طبق آنچه گفته شد، به صورت دستگاه نامعادلات زیر نمایش می‌دهیم :

$$\begin{cases} 3y - x \leq 6 \\ x + y \geq 4 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

این نمودار با توجه به مثالهای ۱ و ۲ و ۳ به صورت زیر است. نقاط داخل یا روی اضلاع مثلث ABC نمودار دستگاه بالاست.

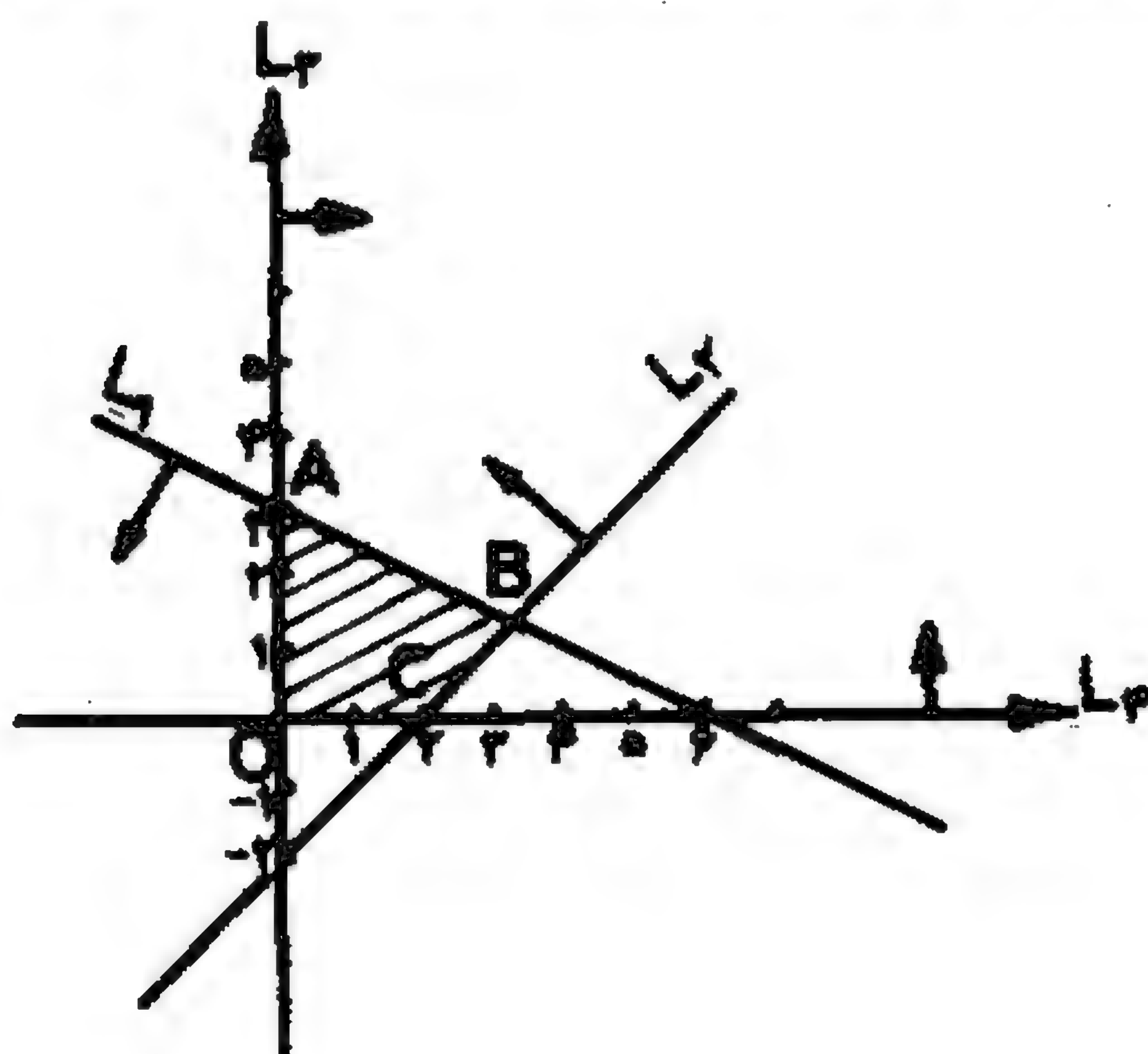


مثال ۵ - نمودار دستگاه نامعادلات زیر را رسم کنید. (در این طور مسائل منظور رسم در یک دستگاه مختصات است).

$$\begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ x - y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

هرگاه L_1 ، L_2 ، L_3 و L_4 به ترتیب نمایش خطوط $x + 2y = 6$ ، $x - y = 2$ ، $x = 0$ و $y = 0$ باشند نمودار این دستگاه به صورت زیر است:

این نمودار شامل نقاط داخل و روی اضلاع چهارضلعی محدب $OABC$ می باشد. رأسهای این چهارضلعی یعنی نقاط O ، A ، B و C را نقاط فرجه (اکسترموم) می نامند.



بیشینه یا کمینه کردن عبارت $ax + by$

در اقتصاد و تجارت، مسائلی مطرح می شود که برای حل آنها باید بیشترین مقدار یا کمترین مقدار یک عبارت جبری به صورت $ax + by$ را که در آن زوجهای (x, y) متعلق به یک مجموعه خاص، نظیر مجموعه نقاط داخل یا روی اضلاع چند ضلعی محدب، می باشد به دست آورد. این مسئله به نام بیشینه کردن (ماکزیمم کردن) یا کمینه کردن (مینیمم کردن) معروف است، برای روشن شدن مطلب به ذکر مثال زیر می پردازیم:

مثال - بیشترین مقدار و کمترین مقدار عبارت $2x + 3y$ را به ازای عضوهای مجموعه:

$$A = \{ (2,1), (3,2), (1,3), (2,5), (4,2) \}$$

به دست آورید.

برای سادگی عبارت $2x + 3y$ را به P نشان می‌دهیم :

$$P = 2x + 3y$$

حال مقدار P را به ازای هر عضو A حساب می‌کنیم:

$$(x, y) = (2, 1) \Rightarrow P = 4 + 3 = 7 \quad (1)$$

$$(x, y) = (3, 2) \Rightarrow P = 6 + 6 = 12 \quad (2)$$

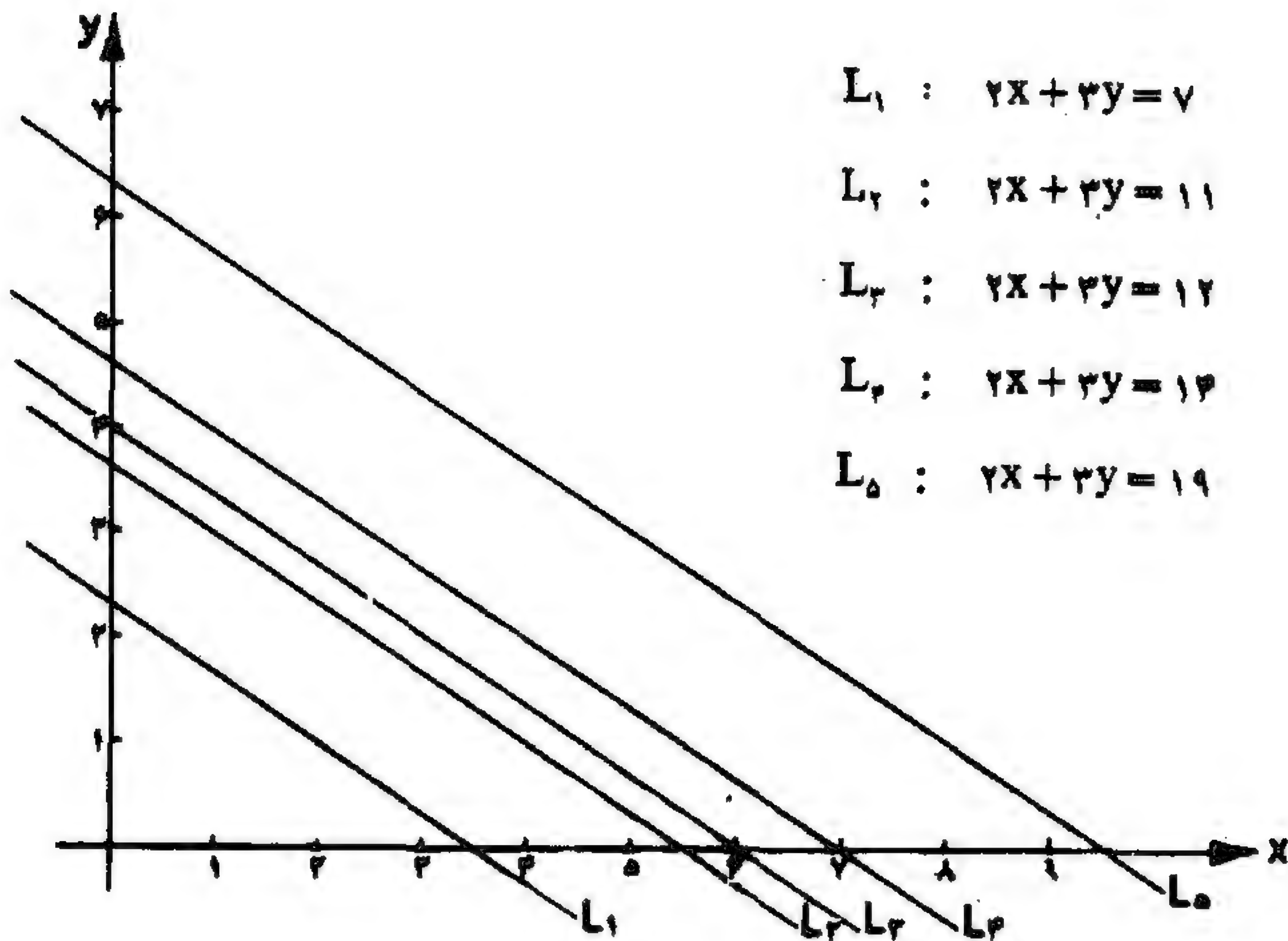
$$(x, y) = (1, 3) \Rightarrow P = 2 + 9 = 11 \quad (3)$$

$$(x, y) = (2, 5) \Rightarrow P = 4 + 15 = 19 \quad (4)$$

$$(x, y) = (3, 2) \Rightarrow P = 6 + 6 = 12 \quad (5)$$

به طوری که دیده می‌شود P به ازای $(2, 1)$ کمترین مقدار و به ازای $(2, 5)$ بیشترین مقدار را دارد .

واضح است که اگر تعداد عضوهای مجموعه A زیاد باشد پیدا کردن بیشترین مقدار و کمترین مقدار P با روش بالا عملی و حتی گاهی اوقات ممکن نیست . معمولاً این گونه مسائل را با روش نمودار حل می‌کنند و این مطلب در حقیقت اساس برنامه‌ریزی با روش ترسیم است . نکته دیگر در مورد مثال بالا این است که نمودار $P = 2x + 3y$ ، به ازای مقادیر مختلف P ، یک دسته خطوط موازی است . مثلاً نظیر زوجهای (۱) تا (۵) بالا خواهیم داشت :



در اینجا خط L_1 از همه به مبدأ نزدیکتر و خط L_2 از همه دورتر است. به عبارت دیگر، دوری و نزدیکی خط $P = 2x + 3y$ از مبدأ به مقدار P بستگی دارد، هر چه P بزرگتر شود خط از مبدأ دورتر است و یا عرض از مبدأ یا طول آن بیشتر است و بالعکس. بنابراین برای به دست آوردن بیشترین یا کمترین اندازه P باید عرض یا طول از مبدأ $P = 2x + 3y$ بیشینه یا کمینه کرد. با توجه به بحث فوق، هدف از حل این گونه مسائل پیدا کردن نقطه یا نقاطی از این نمودار است که یکی از دسته خطوط موازی مورد نظر از آن (آنها) گذشته و عرض یا طول از مبدأ آن بیشترین یا کمترین مقدار را داشته باشد.

مثال ۱ - بیشترین اندازه عبارت $x + 5y$ را که در آن x و y باید در شرایط زیر صدق کند به دست آورید.

$$\begin{cases} 5x + 6y \leq 30 \\ 3x + 2y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

مرکب عبارت $x + 5y$ را مساوی P قرار دهیم خواهیم داشت:

$$P = x + 5y \quad (2)$$

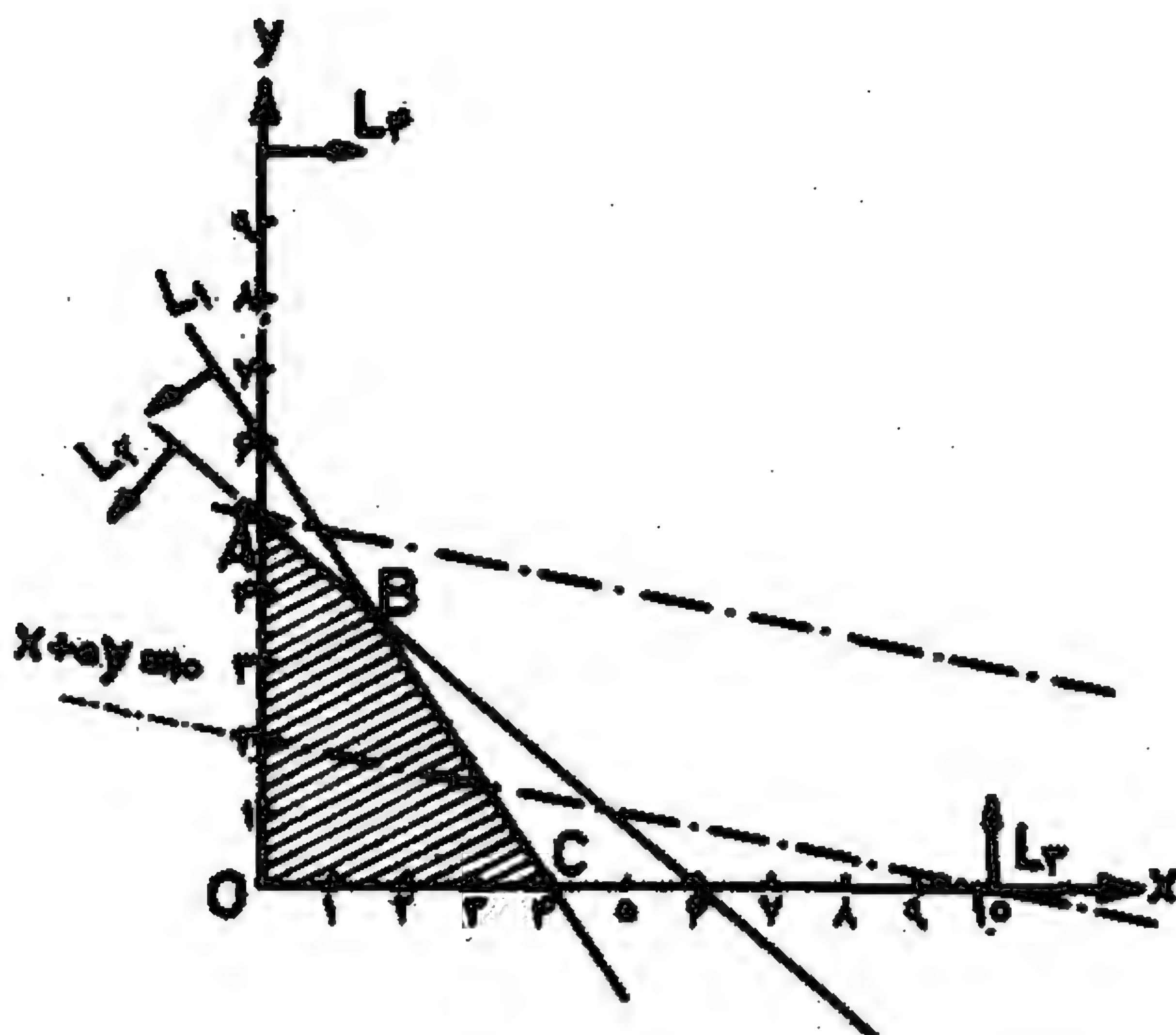
برای پیدا کردن بیشترین مقدار P ، باید خطی را از دسته خطوط (۲) مشخص کنیم که دست کم از یکی از نقاط داخل یا روی اضلاع چهارضلعی نمودار دستگاه نامعادلات (۱) گذشته و عرض از مبدأ آن بیشینه گردد. می دانیم که نمودار (۲) يك دسته خطوط موازی با ضریب زاویه ای $-\frac{1}{5}$ است. معادله یکی از این خطوط به ازای $P = 10$ برابر است با:

$$10 = x + 5y$$

حال اگر در (۲)، مقدار x را مساوی صفر قرار دهیم عرض از مبدأ خط برابر می شود

$y = \frac{P}{5}$. وقتی این عرض از مبدأ بیشینه گردد مقدار P بیشینه شده در نتیجه عبارت $x + 5y$ بیشترین مقدار را خواهد داشت.

نمودار دستگاه نامعادلات وخط $x + \delta y = 10$ در زیر رسم شده است.

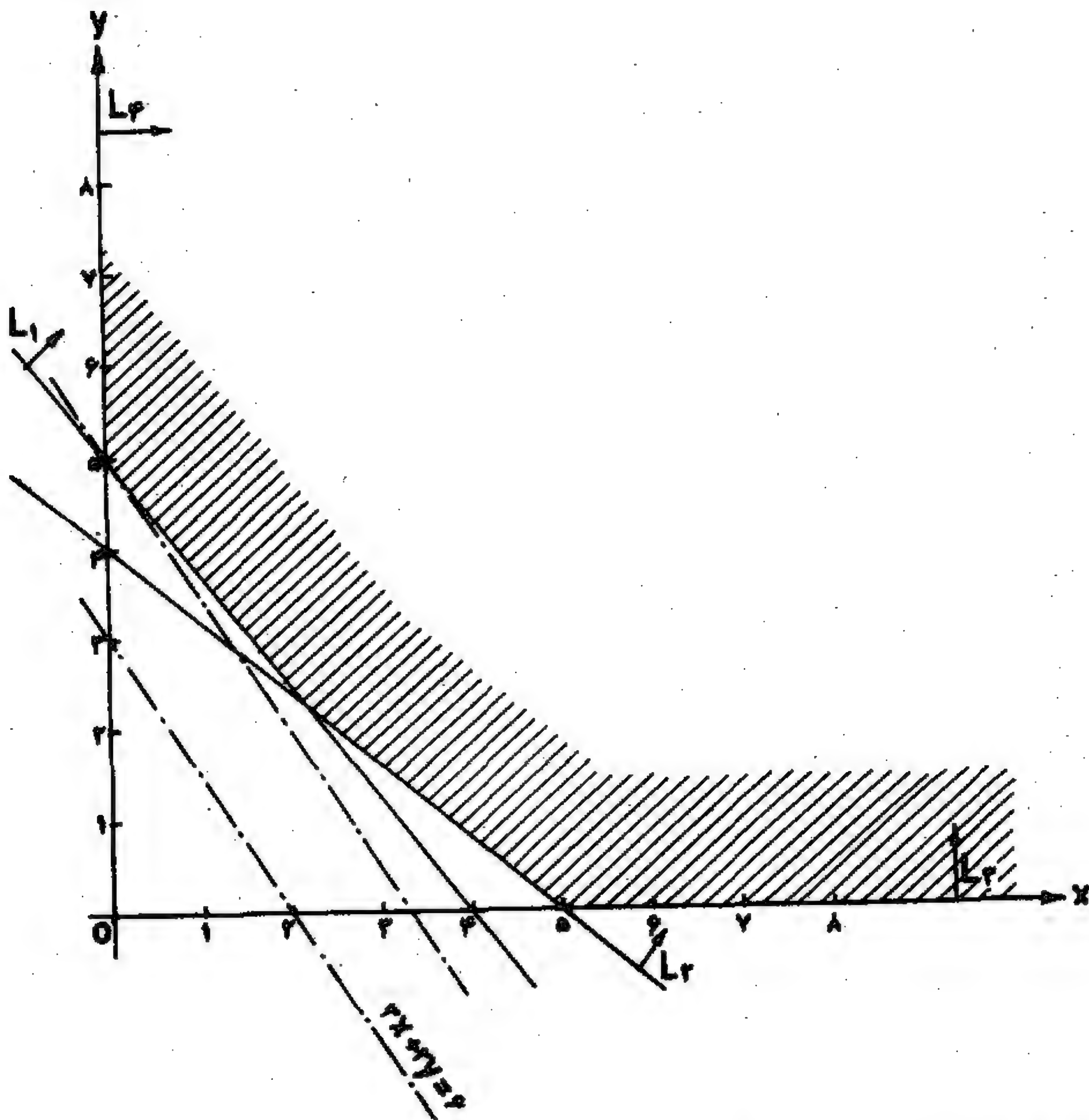


در شکل L_1 ، L_2 ، L_3 و L_4 به ترتیب نمودارهای معادلات $3x + 2y = 12$ ، $5x + 6y = 30$ ، $x = 0$ و $y = 0$ می باشند. همچنین نمودار $x + \delta y = 10$ به صورت خط-نقطه رسم شده است. در شکل دیده می شود خطی که از نقطه $A(0, 5)$ به موازات $x + \delta y = 10$ رسم می شود بزرگترین عرض از مبدأ را در بین دسته خطوط موازی $x + \delta y = P$ دارد. بنابراین زوج $(0, 5)$ عبارت $x + \delta y$ را بیشینه می کند.

مثال ۲ - کمترین اندازه عبارت $3x + 2y$ را که در آن x و y باید در شرایط زیر صدق کنند به دست آورید:

$$\begin{cases} \delta x + 4y \geq 20 \\ 3x + \delta y \geq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

عبارت $3x + 2y$ را مساوی P قرارداده، ابتدای نمودار دستگاه و خط $3x + 2y = P$ را به ازای $P = 0$ یعنی یکی از دسته خطوط $3x + 2y = P$ را رسم می کنیم، در شکل L_1 ، L_2 و L_3 به ترتیب نمودارهای معادلات $\delta x + 4y = 20$ ، $3x + \delta y = 20$ ، $x = 0$ و $y = 0$ می باشند. همچنین نمودار $3x + 2y = 0$ به صورت خط نقطه رسم شده است.



به طوری که دیده می شود نقطه $(5, 0)$ جواب مسئله است^۱.

ماکزیم یا می نیمم کردن تابع $P = ax + by$ تحت شرایط داده شده به نام برنامه ریزی خطی خوانده می شود. زیرا، هم تابع داده شده و هم نامعادلات از درجه اول و خطی می باشند.

تمرین

(در این تمرینات x و y متعلق به مجموعه اعداد حقیقی است)

۱- در هر يك از حالات زیر، تحقیق کنید آیا نقطه های داده شده در نامعادله داده شده

۱ - فرق این مسئله با مسئله قبل این است که در اینجا مجموعه جواب بسته نیست. در این کتاب ما برای این حالت تابع $P = ax + by$ را فقط مینیمم می کنیم و از بحث این که آیا در این حالت می توان P را ماکزیم کرد یا نه صرف نظر می کنیم.

صدق می کند یا نه ؟

$$\text{الف} - (3, 2), (1, 2) : y - x \leq 0 ; \text{ب} - (2, -1), (2, 1) : 3x - 2y < 7$$

$$\text{ج} - (4, -1), (1, -2) : 2x + y > 0$$

۲ - نمودار هر يك از نامعادلات زیر را رسم کنید .

$$x - 2y > -4 ; 2x - y < -8 ; y > 2x ; 3x - 6y \leq 9$$

۳ - نمودار هر يك از دستگاه نامعادلات زیر را رسم کنید . (ناحیه ای که مختصات آن در

نامعادلات زیر صدق می کند پرداز بزنید)

$$\begin{cases} y \geq x \\ x \leq 2 \end{cases} ; \begin{cases} y > -x \\ x < 0 \end{cases} ; \begin{cases} y < -x \\ x > 0 \end{cases} ; \begin{cases} y \geq x - 2 \\ y \leq x + 6 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} -x - 2y < -4 \\ -x + 2y \geq 4 \\ y \geq 0 \end{cases} ; \begin{cases} 2x + 3y < 6 \\ -3x + y \leq 3 \\ y \geq 3 \end{cases} ; \begin{cases} -x - 2y \leq -4 \\ -x + 2y \leq 12 \\ 5x + 3y \geq 15 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x + y \geq 4 \\ 3x + y \geq 6 \\ x + 2y \leq 6 \end{cases} ; \begin{cases} 3x + y \geq 6 \\ x + y \geq 4 \\ x + 3y \geq 6 \\ x + y \leq 6 \end{cases}$$

۴ - بیشترین اندازه عبارت $x + 2y$ را که در آن x و y باید در شرایط زیر صدق کنند

به دست آورید .

$$\begin{cases} x + y \leq 6 \\ y \geq 2 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

۵ - اولاً نمودار دستگاه نامعادلات زیر را رسم کنید .

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ y \leq x \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

ثانیاً نقطه هایی متعلق به این نمودار مشخص کنید که مختصات آنها اعداد درست باشند .

ثالثاً در معادله $2y + x = P$ ، مقدار P را به تسمی تعیین کنید که خط حاصل نمودار

دستگاه را قطع کرده و عرض از مبدأ آن کمینه گردد.

۶- کمترین مقدار عبارت $A = 2x + y$ را تحت شرایط زیر پیدا کنید.

$$\begin{cases} 3x + y \geq 9 \\ x + 3y \geq 11 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

۷- اولاً نمودار دستگاه نامعادلات زیر را رسم کنید.

$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 4 \leq y \leq 7 \\ 2 \leq x \leq 6 \\ y \geq 7 - x \end{cases}$$

ثانیاً تعیین کنید کدام یک از زوجهای $(4, 2)$ ، $(3, 6)$ ، $(4, 5)$ ، $(7, 2)$ ، $(8, 8)$ متعلق به نمودار دستگاه بالاست.

ثالثاً کمترین و بیشترین مقدار عبارت $y + 4x$ را به ازای نقاط نمودار دستگاه پیدا کنید.

برنامه ریزی خطی

مقدمه - در دنیای امروز، صنعت و تجارت از کارهای بسیار مهم هستند که گردانندگان آنها به علت رقابتهای سخت موجود سعی می کنند در چهارچوب عاملها، منابع و نیروی انسانی موجود هزینه هایی از قبیل دستمزد، اجاره، کرایه حمل و نقل و غیره را تا آنجا که ممکن است پایین نگه دارند و در عوض کیفیت، بازده و کارایی را بالا ببرند، تا بدین وسیله بتوانند حداکثر سود ممکن را به دست آورند.

در این بخش مختصری از موقعیتهای خاص اقتصادی، اجتماعی و تجارتي را که به ریاضی مربوط می شوند مورد بحث قرار می دهیم. توصیف ریاضی این موقعیتها منجر به حل مسائلی می شود که مبحث « برنامه ریزی » را تشکیل می دهند.

در برنامه ریزی شرایط موجود در کارخانه را با رابطه های دقیق ریاضی نشان داده و با استفاده از آنها شرطی که سود را بیشینه (ماکزیمم) و یا هزینه را کمینه (مینیمم) می کند انتخاب می شود. به طور خلاصه می توان گفت:

برنامه ریزی یعنی طرح دزیهای فعالیتها روی منابع موجود و محدود به قسمی که نتیجه کار قاعد امکان ایده آل باشد.

در زیر چند نمونه از مسائلی را که مورد بحث این بخش است می آوریم. در این مسائل منابع محدود و موجود مانند منابع مواد غذایی، نیروی انسانی، مالی، سوخت، ... میان فعالیتهای مختلف تقسیم می شود.

مسئله ۱ - برای يك ایستگاه فضایی بسته های غذایی تهیه می شود. هر بسته باید شامل ۵ کیلو گرم از ماده A و ۱۰ کیلو گرم از ماده B باشد. وزن هر بسته برابر ۲۰ یا ۳۰ کیلو گرم یا بین ۲۰ تا ۳۰ کیلو گرم است. هر گاه بهای مواد غذایی A از قرار کیلویی ۱۰۰ ریال و بهای مواد غذایی B از قرار کیلویی ۲۰۰ ریال باشد، تعیین کنید چند کیلو گرم از هر يك از مواد A و B باید ترکیب کنیم تا بهای هر بسته به ارزانترین قیمت ممکن باشد.

مسئله ۲ - يك چاپخانه استادکار و شاگرد استخدام می کند. شرایط موجود به قرار زیر است:

۱ - این چاپخانه حداکثر می تواند ۹ نفر استخدام کند.

۲ - طبق سفارشات رسیده چاپخانه مجبور است روزانه اقلام ۳ واحد چاپ (فورم) تحویل دهد.

۳ - طبق قانون کار این چاپخانه در مقابل حداکثر ۵ استاد کار و حداقل ۲ استاد کار باید يك شاگرد داشته باشد .

۴ - هر استاد کار روزانه ۵ واحد چاپ و هر شاگرد ۳ واحد چاپ می تواند تحویل دهد .

۵ - مزد روزانه هر استاد کار ۱۰۰۰ ریال و هر شاگرد ۵۰۰ ریال تعیین شده است .

تعیین کنید با شرایط بالا، مدیر چاپخانه چه تعدادی استاد و شاگرد استخدام کند تا کمترین مزد را پرداخت نماید .

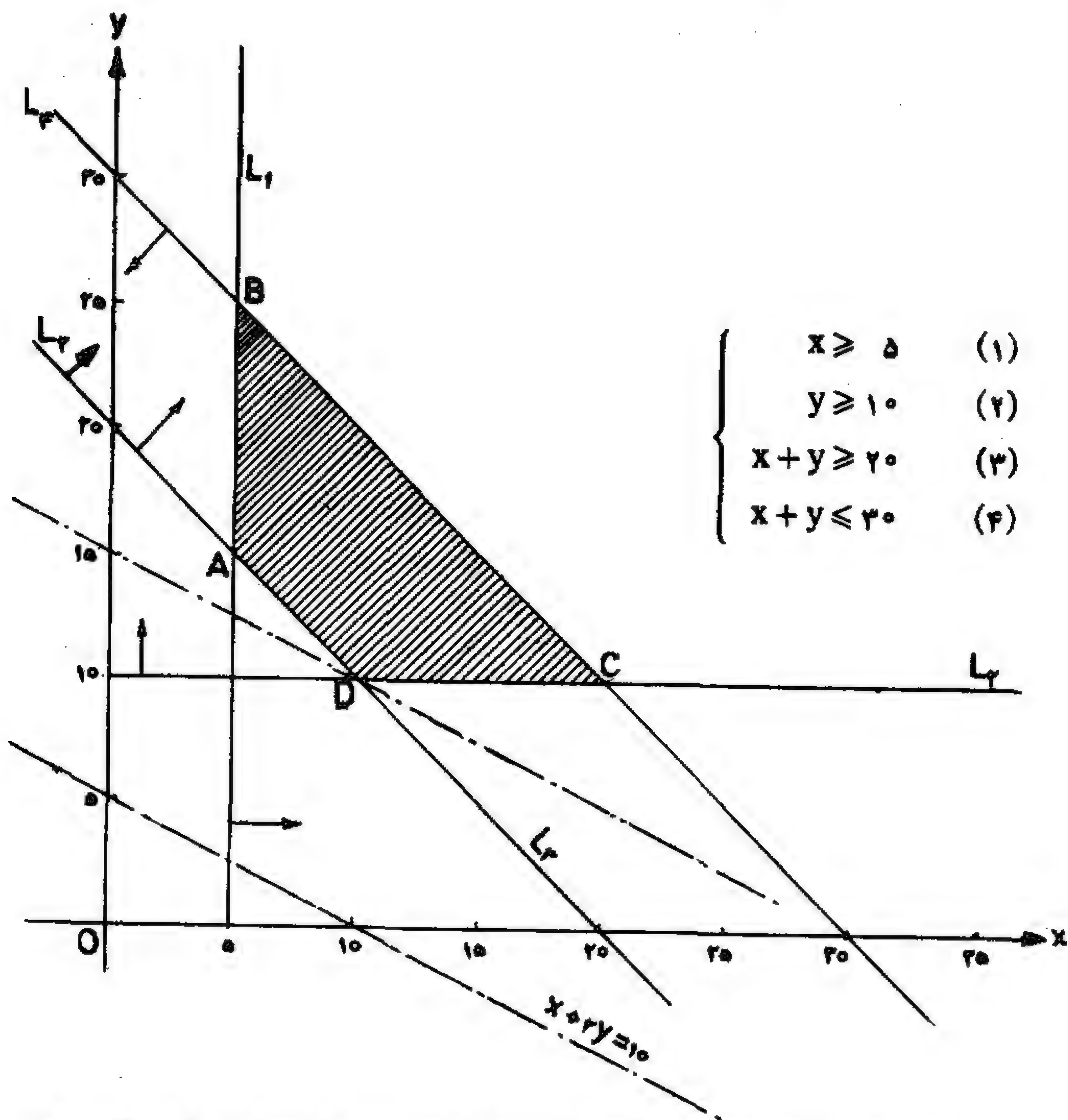
مسئله حمل و نقل - در بیشتر سازمانهای صنعتی به هزینه حمل و نقل کالا، اعم از حمل مواد خام به کارخانه یا توزیع فراورده های کارخانه به مشتریان اهمیت خاص داده می شود . مدیران کارخانه ها همیشه سعی می کنند که این هزینه را تا حد ممکن پایین نگه دارند . مثلاً صرفه جویی در هزینه به کار انداختن تانکرهای نفتی، چه در خشکی و چه در دریا، برای شرکتهای بزرگ نفتی جنبه حیاتی دارد . برای رسیدن به این هدف، معمولاً مدیران مسئول برنامه های کار خود را روی نتایج برنامه ریزی قرار می دهند . مسئله زیر نمونه ای از این گونه است :

مسئله ۳ - يك کارخانه ماشین سازی برای انبار کردن فراورده های خود دو محل D_1 و D_2 در اختیار دارد. ظرفیت این دو انبار به ترتیب ۸۰ و ۲۰ دستگاه ماشین است. دو شرکت C_1 و C_2 برای تاریخ معینی به ترتیب سفارش ۵۰ و ۳۰ دستگاه از ماشینهای این کارخانه را داده اند. هزینه حمل و نقل به فاصله انبارها تا محل تحویل ماشینها بستگی دارد . فاصله هر يك از این انبارها از محل های این دو شرکت، بر حسب کیلومتر، در جدول زیر نشان داده شده است :

شرکت انبار		
	C_1	C_2
D_1	۴۰	۳۰
D_2	۱۰	۲۰

تعیین کنید برای هر مشتری از هر انبار چه تعدادی ماشین حمل شود تا هزینه حمل و نقل کمینه (می نیمم) گردد .

حل مسئله ۱ - فرض کنیم برای یک بسته x کیلو از ماده A و y کیلو از ماده B ترکیب کرده باشیم، آن گاه بنا بر فرض داریم :



خطهای حاصل از دستگاه نامعادلات بالا را به ترتیب به L_1 ، L_2 ، L_3 و L_4 نمایش می‌دهیم. با روشی که گفته شد مجموعه جواب دستگاه بالا را به دست می‌آوریم (چهارضلعی بردار خورده).

هرگاه قیمت یک بسته را به P ۱۰۰ ریال نشان دهیم (ضریب ۱۰۰ برای ساده کردن بحث به کار رفته است) آن گاه بنا بر فرض مسئله خواهیم داشت :

$$100x + 200y = 100P$$

$$x + 2y = P \quad (5) \quad \text{و یا}$$

در اینجا باید جوابی از دستگاه نامعادلات فوق را پیدا کنیم که $x + 2y$ را کمینه کند .
 می دانیم که معادله (۵) معادله يك دسته خطوط موازی یا ضریب زاویه ای $-\frac{1}{2}$ است که یکی از این خطوط ، به ازای $P = 10$ برابر است با :

$x + 2y = 10$ (این خط به صورت خط - نقطه در شکل رسم شده است) . حالا همان طور که دیدیم ، نقطه ای از داخل یا روی اضلاع چهارضلعی ABCD می خواهیم که یکی از دسته خطوط (۵) از آن عبور کرده عرض از مبدأ آن کمینه باشد . این خط که به موازات $x + y = 10$ رسم شده در نمودار با خط نقطه نشان داده شده است . در شکل می بینید که نقطه خواسته شده عبارت است از $D(10, 10)$ (یعنی از هر يك از مواد A و B باید ۱۰ کیلو گرم انتخاب شود) .
 به ازای مختصات این نقطه ، $P = 30$ ، یعنی قیمت يك بسته $P = 3000$ ریال است که کمترین قیمت ممکنه است .

حل مسئله ۲ - فرض کنید مدیر چاپخانه ، x استاد کار و y شاگرد استخدام کند، آن گاه شرایط کارخانه به صورت زیر خواهد بود :

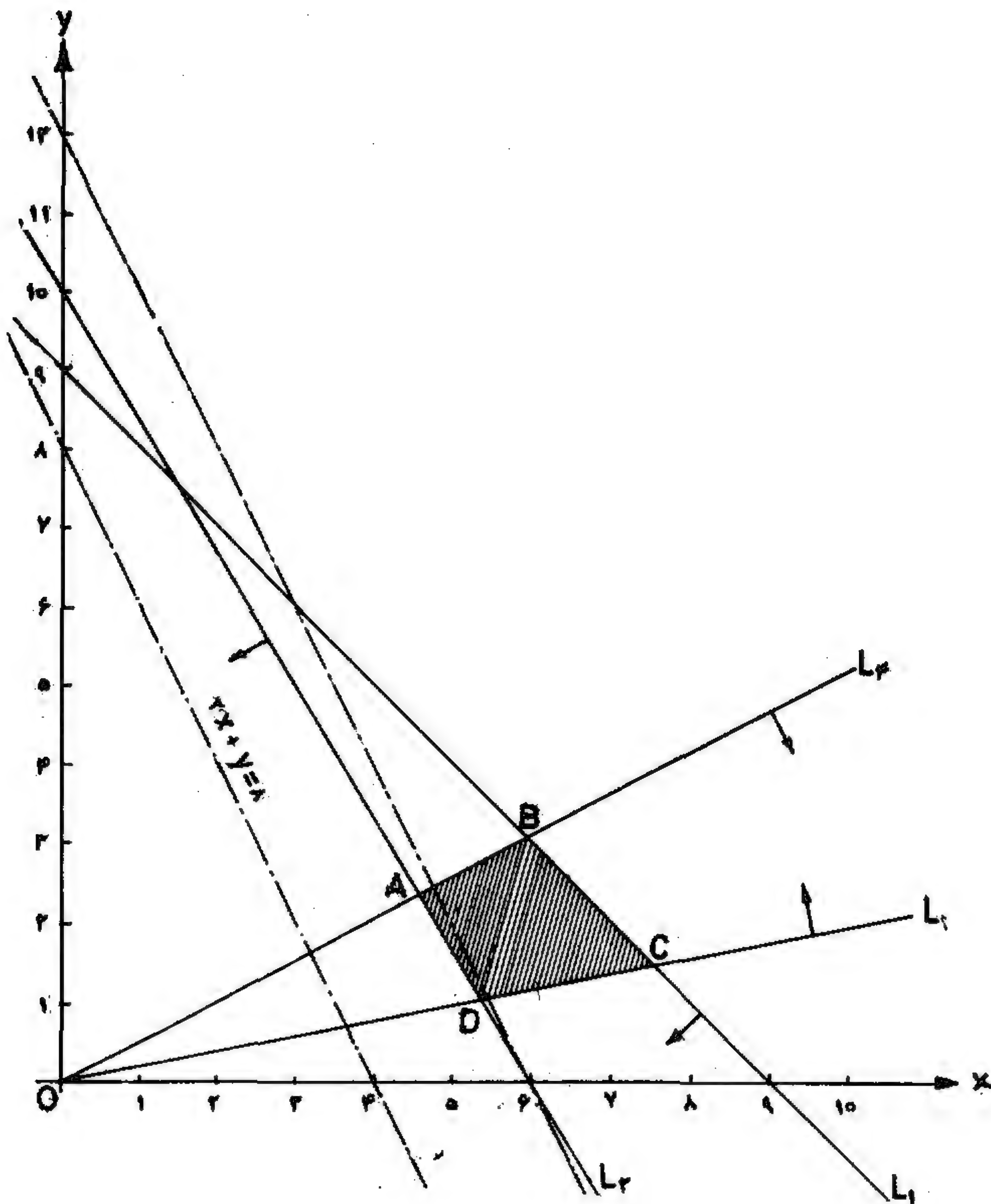
$$\left\{ \begin{array}{ll} x + y \leq 9 & (L_1) \quad \text{شرط (۱)} \\ 5x + 3y \geq 30 & (L_2) \quad \text{شرط (۲) و (۴)} \\ 5y \geq x & (L_3) \quad \text{شرط (۳)} \\ 2y \leq x & (L_4) \quad \text{شرط (۳)} \end{array} \right.$$

هر گاه مجموع مزدپرداختی را با $500P$ (ضریب ۵۰۰ برای سادگی به کار رفته است) نمایش دهیم با توجه به فرض آخر مسئله خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} 1000x + 500y &= 500P \\ 2x + y &= P \quad (۱) \quad \text{و یا} \end{aligned}$$

یکی از دسته خطوط موازی (۱) به ازای $P = 8$ ، برابر است با $2x + y = 8$ ، در صفحه بعد نمودار دستگاه و نمودار $2x + y = 8$ رسم شده است .

حال نقطه ای داخل یا روی اضلاع چهارضلعی ABCD می خواهیم که یکی از دسته خطوط (۱) از آن عبور کرده عرض از مبدأ آن بیشینه باشد . این خط که به موازات $2x + y = 8$ رسم شده در شکل با خط - نقطه نشان داده شده است ، این خط چهارضلعی ABCD را در طول يك پاره خط قطع می کند که فقط نقطه $(5, 2)$ آن که مختصاتش اعداد صحیح است قابل قبول می باشد . یعنی مدیر چاپخانه باید در مقابل ۵ استاد کار ۲ شاگرد استخدام نماید تا دستمزد را



به کمترین مقدار برساند. در اینجا نیز مختصات (x, y) باید اعداد درست مثبت باشند.
حل مسئله ۳ - فرض کنیم از انبار D_1 ، x و y دستگاه ماشین به ترتیب به C_1 و C_2 ارسال شود، با توجه به فرض مسئله داریم:

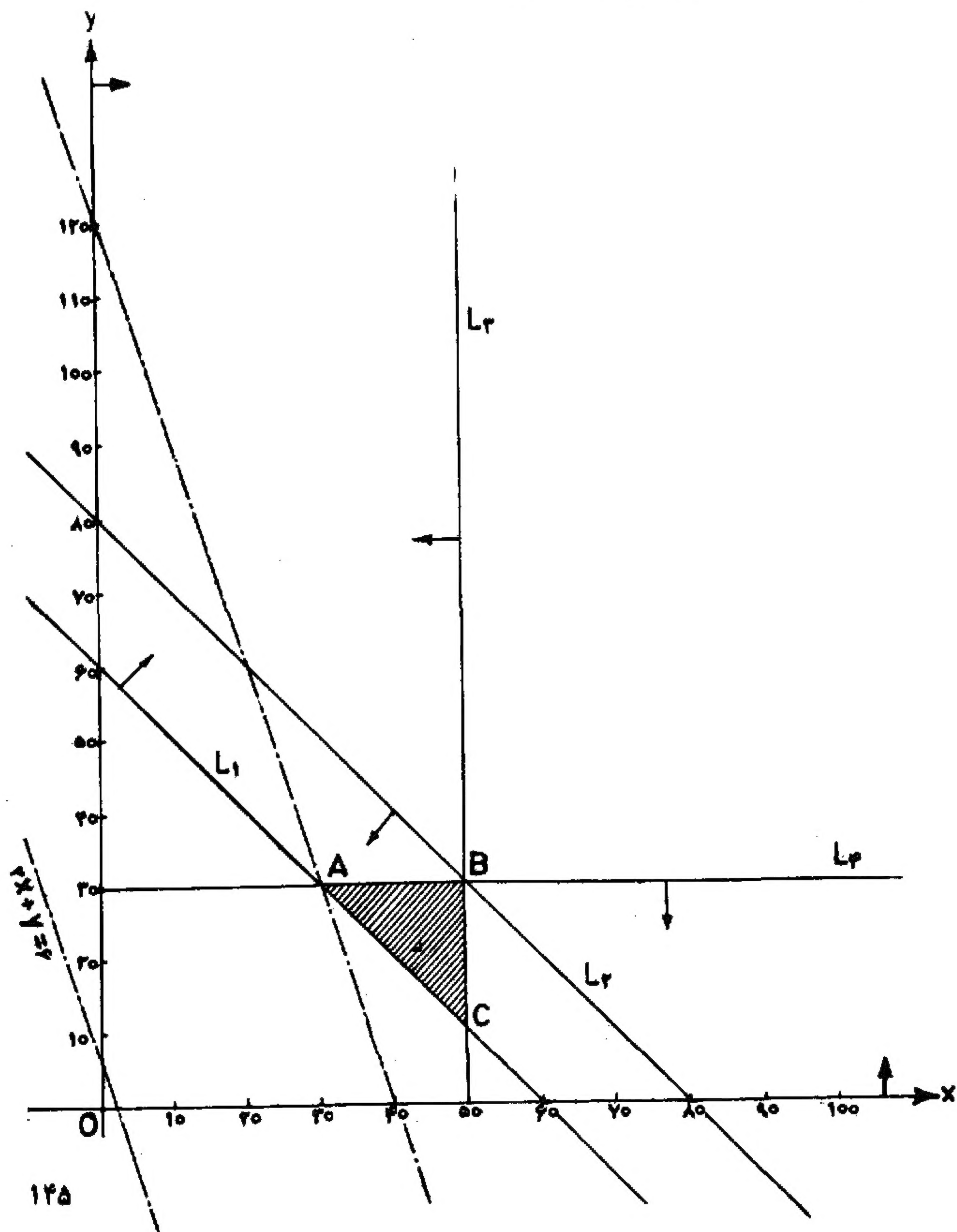
$$\text{ظرفیت انبار } D_1: (50 - x) + (30 - y) \leq 20$$

$$\text{و یا پس از ساده شدن: } x + y \geq 60$$

بنابراین دستگاه نامعادلات به دست آمده عبارت است :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x+y \geq 60 & L_1 \\ x+y \leq 80 & L_2 \\ 0 \leq x \leq 50 & L_3 \\ 0 \leq y \leq 30 & L_4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ظرفیت انبار } D_1 : \\ \text{سفارشات رسیده} \end{array}$$

نمودار این دستگاه در زیر رسم شده است :



هزینه حمل و نقل ، با توجه به جدول و فرض مسئله برابر است با :

$$۲۰x + ۳۰y + ۱۰(۵۰ - x) + ۲۰(۳۰ - y)$$

و یا پس از ساده شدن :

$$۳۰x + ۱۰y + ۱۱۰۰$$

هرگاه این عبارت را مساوی $۱۰P + ۱۱۰۰$ بگیریم (ضریب ۱۰ و عدد ۱۱۰۰ برای ساده شدن انتخاب شده‌اند) ، خواهیم داشت :

$$۳۰x + ۱۰y + ۱۱۰۰ = ۱۰P + ۱۱۰۰$$

$$۳x + y = p \quad (۱) \quad \text{و یا :}$$

یکی از دسته خطوط (۱) ، به ازای $P = ۶۰$ ، برابر است با $۳x + y = ۶۰$ ، که نمودار آن در شکل با خط - نقطه رسم شده است . همان طور که در شکل دیده می‌شود خطی که از نقطه $A(۳۰, ۳۰)$ می‌گذرد و با خط $۳x + y = ۶۰$ موازی است دارای کمترین عرض از مبدأ است .

برای مشتری $C_۱$: ۳۰ ماشین از $D_۱$ و ۲۰ ماشین از $D_۲$.

برای مشتری $C_۲$: ۳۰ ماشین از $D_۱$ و ۰ ماشین از $D_۲$.

تمرین

۱ - يك کارخانه کوچک چترسازی دو نوع چتر مردانه و زنانه می‌سازد . برای ساختن هر چتر مردانه يك ساعت کار با ماشین A و ۲ ساعت کار با ماشین B و برای ساختن هر چتر زنانه ۳ ساعت کار با ماشین A و يك ساعت کار با ماشین B لازم است . از هر ماشین ، به دلائل فنی ، در هفته حد اکثر ۸۰ ساعت استفاده می‌شود . اگر کارخانه برای هر چتر مردانه ۲۴۰ ریال و هر چتر زنانه ۳۶۰ ریال سود در نظر بگیرد ، تعیین کنید از هر نوع چتر چه تعدادی در هفته بسازد تا سود او بیشینه گردد .

۲ - يك کارخانه کود شیمیایی می‌خواهد بسته‌های کود که هر بسته اقلاً محتوی ۲۲۴ گرم ازت و ۲۸۰ گرم فسفر است تهیه نماید . کارخانه این مواد را از استخوان و سبزی خشك شده تأمین می‌کند . هر کیلو استخوان دارای ۵۰ گرم فسفر و ۲۸ گرم ازت و هر کیلو سبزی خشك شده دارای ۲۸ گرم فسفر و ۵۰ گرم ازت است . ارزش استخوان کیلویی ۲۱۰ ریال و سبزی خشك شده ۱۶۸ ریال است . تعیین کنید برای تهیه هر بسته چند کیلو گرم استخوان و چند کیلو گرم سبزی خشك شده استفاده نماید تا هزینه او کمینه گردد .

۳ - شخص مریضی برای تأمین احتیاجات ویتامین فصلی بدن خود دست کم به ۱۲۰۰ واحد ویتامین $B_۱$ و ۱۲۰۰ واحد ویتامین $B_۲$ و ۲۴۰۰ واحد ویتامین $B_۳$ نیاز دارد ؛ دو نوع قرص در بازار موجود است ، نوع اول شامل ۶ واحد $B_۱$ ، ۲ واحد $B_۲$ و ۶ واحد $B_۳$ و بهای

آن ۶ ریال و نوع دوم شامل ۲ واحد B_1 ، ۶ واحد B_2 و ۶ واحد B_3 است و بهای آن ۱۲ ریال می باشد، تعیین کنید از هر نوع چند قرص خریداری کند تا ضمن تأمین ویتامین مورد نیاز بدن خود ، کمترین پول را نیز پرداخت نماید .

۴ - خیاطی ۱۶ متر پارچه نخی ، ۱۱ متر ابریشمی و ۱۵ متر پشمی موجود دارد . با این پارچه ها می خواهد دو نوع لباس تهیه کند . نوع اول نیاز به ۲ متر پارچه نخی ، ۱ متر ابریشمی و ۱ متر پشمی دارد و نوع دوم نیاز به ۱ متر نخی ، ۲ متر ابریشمی و ۳ متر پشمی دارد . هرگاه بهای فروش لباسها ، طبق دستور شورای اصناف به ترتیب ۲۱۰۰ و ۳۵۰۰ ریال باشد ، تعیین کنید از هر لباس چند دست تهیه کند تا پولی که به دست می آورد بیشینه باشد.

۵ - شرکتی دو معدن A و B در اختیار دارد . از معدن A روزانه ۱۰ تن سنگ آهن درجه ۱ ، ۳ تن درجه ۲ و ۳ تن درجه ۳ و از معدن B روزانه ۲ تن از نوع اول و دوم و ۱۰ تن از نوع سوم می تواند استخراج کند . شرکت طبق قراردادی که با بازارهای مصرف کننده بسته است نیاز به ۸۰ تن سنگ درجه ۱ ، ۱۲۰ تن درجه ۲ و ۳۰۰ تن درجه ۳ دارد . هرگاه هزینه استخراج از هر معدن روزانه ۲۰۰۰ ریال باشد، تعیین کنید چند روز باید از هر معدن بهره برداری کند تا هزینه او کمینه گردد .

۶ - يك کارخانه دوچرخه سازی دو نمونه دوچرخه ، یکی معمولی و دیگری مسابقه ای می سازد . شرایط موجود و حاکم بر کار کارخانه به قرار زیر است :

۱- ساختن هر دوچرخه معمولی ۶ ساعت و دوچرخه مسابقه ای ۱۰ ساعت وقت يك کارگر را می گیرد .

۲- کارخانه بیشتر از ۱۵ کارگر که هر کارگر هفته ای ۵ روز و روزی ۸ ساعت کار می کند ، نمی تواند استخدام نماید .

۳- قیمت مواد اولیه برای هر دوچرخه ۹۰۰ ریال و بودجه هفتگی کارخانه برای خرید مواد اولیه حداکثر ۷۲۰۰۰ ریال است.

۴- کارخانه قراردادی با بازارهای مصرف کننده دارد که باید در هفته دست کم ۳۰ دوچرخه معمولی و ۲۰ دوچرخه مسابقه ای تولید نماید .

۵- سود دوچرخه معمولی ۱۲۰۰ ریال و دوچرخه مسابقه ای ۳۶۰۰ ریال می باشد .

تعیین کنید کارخانه در هر هفته چه تعدادی از هر نوع تولید نماید تا بیشترین سود عاید او گردد (سود او بیشینه شود)

۷ - يك کارخانه ماشین سازی جیب و لندرور می سازد . این کارخانه موتورهای مورد نیاز ماشینها را از کارخانه دیگری تأمین می کند . سود کارخانه در فروش هر جیب ۵۵۰۰۰ ریال

وهرلندروور ۶۵۰۰۰ ریال است . ظرفیت تولید این کارخانه درماه روی هم ۳۰۰ دستگاه است .
برای آماده کردن يك جيب ۸۰ ساعت و يك لندروور ۱۴۰ ساعت نیروی انسانی لازم است . مجموع
نیروی انسانی موجود درهرماه ۳۱۵۰۰ ساعت است . کارخانه درماه حداکثر ۲۵۰ موتورجيب
و ۲۰۰ موتور لندروور دراختیار دارد . تعیین کنید این کارخانه ازهرنوع چند ماشین تولید کند تا
سود ماهانه او بیشینه (ماکزیمم) گردد .

۸- يك متخصص رژیم غذایی می خواهد دو نوع غذا به قسمی مخلوط نماید که مقدار
ویتامین غذای به دست آمده به شرح زیر باشد :

دست کم ۹ واحد ویتامین A ، ۷ واحد ویتامین B ، ۱۰ واحد ویتامین C و ۱۲ واحد
ویتامین D . تعداد واحد ویتامینهای موجود درهر کیلو گرم از این غذاها طبق جدول زیر است :

ویتامین مواد غذایی	A	B	C	D
نوع اول	۲	۱	۱	۱
نوع دوم	۱	۱	۲	۳

هرگاه بهای غذای نوع اول ازقرار کیلویی ۵۰ ریال و غذای نوع دوم کیلویی ۷۰ ریال
باشد ، تعیین کنید به چه نسبت باید این غذاها را ترکیب نمود تا ضمن تأمین نظر متخصص ، بهای
هر کیلو از مخلوط نیز کمینه گردد .

۹- در يك معدن زغال سنگ دو رگه زغال A و B وجود دارد . مدیر این معدن
قرارداد فروشی امضا کرده است که طبق آن هر هفته باید مطابق جدول زیر زغال تحویل دهد .

درجه ۱	۱۰۰۰ تن	درجه ۳	۲۰۰۰ تن
درجه ۲	۷۰۰ تن	درجه ۴	۴۵۰۰ تن

هزینه استخراج از رگه اول ۴۰۰۰۰ ریال و از رگه دوم ۱۰۰۰۰۰ ریال درهر نوبت کار است
مقدار زغال استخراجی درهر نوبت برحسب تن به قرار زیر است .

درجه زغالها رگه ها	۱	۲	۳	۴
A	۲۰۰	۱۰۰	۲۰۰	۴۰۰
B	۱۰۰	۱۰۰	۵۰۰	۱۵۰۰

تعیین کنید ازهر رگه چند نوبت استخراج کند تا بتواند ضمن انجام تعهد هزینه استخراج را
به حداقل برساند .

